

Ejercicios Resueltos: Progresión Aritmética

➤ Ejercicio 1

Una empresa excava pozos profundos para obtener aguas subterráneas. Por los primeros 10 cm cobra \$ 11000 y por cada uno de los siguientes decímetros (*dm*) restantes cobra \$2000 más que por el anterior. Determine la profundidad de un pozo si se cobró \$ 1.739.000 por el trabajo

Desarrollo:

El precio que se cobra por cada decímetro (10 cm) forma una PA

11000 , 13000 , 15000 ,

donde $a_1 = 11000$ y $d = 2000$

Se requiere calcular n tal que la suma total S_n sea de 1739000

Reemplazando en la fórmula $S_n = \frac{n(2a_1 + (n-1)d)}{2}$ se obtiene

$$S_n = \frac{n(2 \cdot 11000 + (n-1) \cdot 2000)}{2}$$

$$S_n = \frac{n(2 \cdot 11000 + (n-1) \cdot 2000)}{2}$$

$$1739000 = \frac{n(22000 + 2000n - 2000)}{2}$$

$$1739000 = \frac{n(20000 + 2000n)}{2}$$

$$1739000 = 10000n + 1000n^2$$

$$n^2 + 10n - 1739 = 0$$

$$(n + 47)(n - 37) = 0 \Rightarrow n = -47 \text{ o } n = 37$$

Como $n = -47 \notin \mathbb{N}$, la única solución posible es $n = 37$

Es decir el pozo tiene 37 dm que equivale a 3,7 metros de profundidad.

➤ Ejercicio 2

En un estacionamiento hay 50 filas de autos, se sabe que la diferencia entre el número de autos de una fila y el del anterior es constante y además que en la fila ocho hay 41 autos y en la quince 62.

- a) Determine la cantidad de autos que hay en la última fila
- b) Si cada auto pagó \$1000 por estacionar, ¿Cuánto dinero se recaudó?

Desarrollo:

El número de autos de cada fila forman una PA : a_1, \dots, a_{50}

donde $a_8 = 41$ y $a_{15} = 62$, al reemplazar en la formula $a_n = a_1 + (n-1)d$

se obtienen dos ecuaciones

$$\begin{aligned} a_8 = 41 &\Rightarrow a_1 + 7d = 41 \\ a_{15} = 62 &\Rightarrow a_1 + 14d = 62 \end{aligned} \Rightarrow 7d = 21 \Rightarrow d = 3 \text{ y } a_1 = 20$$

- a) Cantidad de autos en la última fila : a_{50}

$$a_{50} = 20 + 49 \cdot 3 = 167 \text{ autos}$$

- b) Primero se debe calcular el número total de autos en el estacionamiento, es decir la suma de las 50 filas de autos : S_{50}

$$S_{50} = \frac{50(a_1 + a_{50})}{2} = \frac{50(20 + 167)}{2} = 4675 \text{ autos}$$

Si cada auto pagó \$1000 entonces se recaudó

$$4675 \times 1000 = 4.675.000 \text{ pesos}$$



➤ Ejercicio 3

Una progresión aritmética de diferencia $d=2$ tiene 22 términos. Calcule el primer término y la suma de todos los términos si sabe que el último término es igual al cuadrado del primero.

Desarrollo:

Se sabe que $a_{22} = (a_1)^2$ y diferencia $d=2$

reemplazando en la fórmula de PA $a_n = a_1 + (n-1)d$ se tiene

$$a_{22} = a_1 + (22-1) \cdot 2$$

$$a_1^2 = a_1 + 42$$

$$a_1^2 - a_1 - 42 = 0$$

$$(a_1 - 7)(a_1 + 6) = 0$$

Resolviendo la ecuación cuadrática se obtiene $a_1 = 7$ o $a_1 = -6$

Si $a_1 = 7$ entonces $a_{22} = 49$ y la PA es 7,9,11,13,.....

Para calcular la suma de los 22 términos se reemplaza en la fórmula

$$S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2} \quad \text{entonces} \quad S_{22} = \frac{22(a_1 + a_{22})}{2} = \frac{22(7 + 49)}{2} = 616$$

Si $a_1 = -6$ entonces $a_{22} = 36$ y la PA es -6,-4,-2,0,.....

$$\text{luego } S_{22} = \frac{22(-6 + 36)}{2} = 450$$

Por lo tanto este problema tiene dos respuestas:

$$a_1 = 7 \quad \text{y} \quad S_{22} = 616 \quad \text{o bien} \quad a_1 = -6 \quad \text{y} \quad S_{22} = 450$$

