Ejercicios Desarrollados: Análisis de Funciones

Ejercicio 1

$$f(x) = x^x$$

- Dom f = IR⁺ es decir, está definida solo para números positivos
- Derivamos para determinar máximos y mínimos

Es conveniente extraer logaritmos para simplificar el cálculo de la derivada:

$$y = x^x$$

$$\ln(y) = \ln(x^x)$$

$$\ln(y) = x \cdot \ln(x) \quad \text{Derivamos}$$

$$\frac{1}{y} \cdot y' = 1 \cdot \ln(x) + x \cdot \frac{1}{x}$$

$$y' = x^x[\ln(x) + 1]$$

- Igualando a cero la primera derivada

Tenemos que $\ln(x) + 1 = 0$, ya que $x^x \neq 0$

$\ln(x) = -1$ Donde $x = e^{-1} \approx 0{,}37$

Evaluamos la derivada en el intervalo $]0\,,\ e^{-1}[\,:\ y'(0{,}1) \approx -1{,}03 < 0$

Por tanto, sabemos que es **decreciente en el intervalo $]0\,,\ e^{-1}[$**

Ahora evaluamos en el intervalo $]e^{-1}, \infty[$

$y'(1) = \ln(1) + 1 = 0 + 1 = 1 > 0$, por tanto, es **creciente en el intervalo $]e^{-1}, \infty[$**

Entonces x = e^{-1} hay un mínimo, por lo tanto:

La función tiene un mínimo en el punto $\left(\frac{1}{e}\ ,\ \left(\frac{1}{e}\right)^{\frac{1}{e}}\right)$

Expresado con dos decimales corresponde al punto **(0.37 , 0.69) mínimo absoluto de la función**

- ✓ Calculamos la segunda derivada para obtener puntos de inflexión

$y' = x^x[\ln(x) + 1]$ entonces $y'' = (x^x)' \cdot [\ln(x) + 1] + x^x \cdot [\ln(x) + 1]'$

$$y'' = x^x \cdot [\ln(x) + 1] \cdot [\ln(x) + 1] \ + \ x^x \cdot \frac{1}{x}$$

$$y'' = x^x \cdot [\ln(x) + 1] \cdot [\ln(x) + 1] \ + \ x^{x-1}$$

$$y'' = x^{x-1}[\ x(\ln(x) + 1)^2 + 1]$$

Debemos resolver la ecuación $x(\ln(x) + 1)^2 + 1 = 0$, ya que $x^{x-1} \neq 0$

$x(\ln(x) + 1)^2 + 1 = 0$ de donde $(\ln(x) + 1)^2 = -\frac{1}{x}$

$$\ln(x) + 1 = \sqrt{-\frac{1}{x}}$$

Que no tiene solución real, por tanto, la función **no tiene puntos de inflexión**

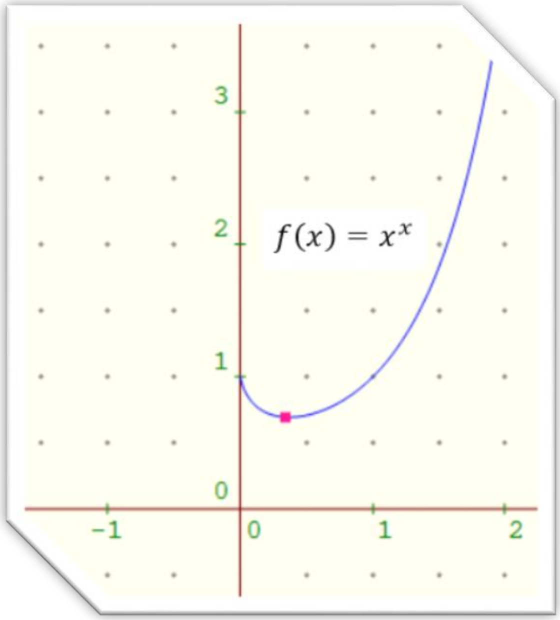
- ✓ Veamos ahora la concavidad en el intervalo $]0, \infty[$, eligiendo cualquier real de su dominio:

$$y'' = x^{x-1}[\ x(\ln(x) + 1)^2 + 1]$$

$$y''(1) = 1^{1-1}[\ 1 \cdot (\ln(1) + 1)^2 + 1]$$

$$y''(1) = 2 > 0$$

Luego, su **concavidad es positiva en todo su dominio**


3
2
1
0
$f(x) = x^x$
−1
0
1
2