Ejercicios Resueltos: OVA 7

Ejercicio 1

I) Calcular cada uno de los siguientes límites de funciones **racionales**:

1) $\lim_{x\to 3}\frac{2x^3-9x^2+7x+6}{3x^3-4x^2-17x+6}$

Respuesta.

$$\lim_{x\to 3}\frac{2x^3-9x^2+7x+6}{3x^3-4x^2-17x+6}\overset{x=3}{=}\frac{\cancel{2\cdot 3^3}-\cancel{9\cdot 3^2}+\cancel{7\cdot 3}+\cancel{6}}{\cancel{3\cdot 3^3}-\cancel{4\cdot 3^2}-\cancel{17\cdot 3}+\cancel{6}}$$

$= \frac{0}{0}$ ¡Indeterminado!

Los ceros obtenidos en los polinomios del numerador y denominador nos indican que la división para ambos por $(x-3)$ nos da resto cero, lo que verificamos efectuando la División Sintética para cada uno de ellos:

Numerador.

Divisor $(x-3)$	Coeficiente de x^3	Coeficiente de x^2	Coeficiente de x	Coeficiente de x^0
3	2	-9	7	6
		6	-9	-6
	2	-3	-2	0 Resto (Cero Numerador)
3		6	9	
	2	3	7 *Nuevo Resto*	

Denominador.

Divisor $(x-3)$	Coeficiente de x^3	Coeficiente de x^2	Coeficiente de x	Coeficiente de x^0
3	3	-4	-17	6
		9	15	-6
	3	5	-2	0 Resto

				(Cero Denominador)
3		9	42	
	3	14	40 *Nuevo Resto*	

Concluyéndose que el límite tiene por valor el cociente entre los nuevos restos; es decir:

$$\lim_{x\to 3}\frac{2x^3-9x^2+7x+6}{3x^3-4x^2-17x+6}=\frac{7}{40}$$

2) $\lim_{x\to 4}\frac{x^4-3x^3-3x^2-3x-4}{x^4-4x^3+x-4}$.

<u>Respuesta.</u> Resumiendo el procedimiento explicado en el ejercicio anterior:

Numerador

	1	-3	-3	-3	-4
4		4	4	4	4
	1	1	1	1	0
4		4	20	84	
	1	5	21	**85**	

Denominador

	1	-4	0	1	-4
4		4	0	0	4
	1	0	0	1	0
4		4	16	64	
	1	4	16	**65**	

Por lo tanto:

$$\lim_{x\to 4}\frac{x^4-3x^3-3x^2-3x-4}{x^4-4x^3+x-4}=\frac{85}{65}$$; o sea:

$$\lim_{x\to 4}\frac{x^4-3x^3-3x^2-3x-4}{x^4-4x^3+x-4}=\frac{17}{13}$$

3) $\lim_{x\to 1/2}\frac{2x^4-x^3+16x-8}{2x^3-x^2-8x+4}$.

<u>Respuesta</u>.

Numerador

	2	-1	0	16	-8
1/2		1	0	0	8
	2	0	0	16	0
1/2		1	1/2	1/4	
	2	1	1/2	**65/4**	

	2	-1	-8	4
1/2		1	0	-4
	2	0	-8	0
¡/2		1	1/2	
	2	1	**-15/2**	

Por lo tanto:

$$\lim_{x\to 1/2}\frac{2x^4-x^3+16x-8}{2x^3-x^2-8x+4}=\frac{\frac{65}{4}}{-\frac{15}{2}};\ osea:$$

$$\lim_{x\to 1/2}\frac{2x^4-x^3+16x-8}{2x^3-x^2-8x+4}=-\frac{13}{6}$$

➢ *Ejercicio 2*

II) Los siguientes límites muestran la estrategia pertinente a seguir para obtener el único valor , si existe:

1) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{5x+1}-4}{\sqrt{2x+3}-3}$.

<u>Respuesta.</u>

$\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{5x+1}-4}{\sqrt{2x+3}-3}\overset{x=3}{=}\dfrac{0}{0}$, $in\det er\min ado$. Cuando $x\to 3$, se produce esta indeterminación, lo que significa que el divisor $(x-3)$ **está** en el numerador y denominador. Como éstos son irracionales y para encontrar $(x-3)$, debemos racionalizar ambos:

$$\lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{5x+1}-4}{\sqrt{2x+3}-3}=\lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{5x+1}-4}{\sqrt{2x+3}-3}\cdot\frac{\sqrt{5x+1}+4}{\sqrt{2x+3}+3}\cdot\frac{\sqrt{2x+3}+3}{\sqrt{5x+1}+4}$$

$$\lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{5x+1}-4}{\sqrt{2x+3}-3}=\lim_{x\to 3}\frac{\left(\sqrt{5x+1}\right)^2-4^2}{\left(\sqrt{2x+3}\right)^2-3^2}\cdot\frac{\sqrt{2x+3}+3}{\sqrt{5x+1}+4}$$

$$\lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{5x+1}-4}{\sqrt{2x+3}-3}=\lim_{x\to 3}\underbrace{\frac{5\cancel{(x-3)}}{2\cancel{(x-3)}}}_{\substack{apareció\ divisor\\(x-3)}}\cdot\frac{\sqrt{2x+3}+3}{\sqrt{5x+1}+4}$$

$$\lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{5x+1}-4}{\sqrt{2x+3}-3}\overset{(x=3)}{=}\frac{5}{2}\cdot\frac{6}{8}$$

$$\lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{5x+1}-4}{\sqrt{2x+3}-3}=\frac{15}{8}$$

2) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{1-\sqrt{2x-3}}{2-\sqrt[3]{9-\sqrt{2x-3}}}$.

Respuesta.

$\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{1-\sqrt{2x-3}}{2-\sqrt[3]{9-\sqrt{2x-3}}}\overset{x=2}{=}\dfrac{0}{0}$, es una indeterminación.

Observación. La función del ejercicio 1) anterior es irracional en el numerador y denominador, pero ambas raíces son raíces cuadradas; por esto, es amigable la racionalización. En cambio, nuestro límite tiene irracionales, siendo el denominador raíz cúbica, lo cual hace no tan amigable la racionalización, significando que debemos buscar otra estrategia matemática para el valor del límite. Es sugerente que en el numerador y denominador esté $\sqrt{2x-3}$, por lo cual hacemos el **cambio de variable:**

$$9-\sqrt{2x-3}=u^3 \Rightarrow 1-\sqrt{2x-3}=u^3-8$$

de donde:

Para $x=2$, $u=2$ y con ello nuestro límite queda:

$$\lim_{x\to 2}\frac{1-\sqrt{2x-3}}{2-\sqrt[3]{9-\sqrt{2x-3}}}=\lim_{u\to 2}\frac{u^3-8}{2-u}$$

$$\lim_{x\to 2}\frac{1-\sqrt{2x-3}}{2-\sqrt[3]{9-\sqrt{2x-3}}}=\lim_{u\to 2}\left[-\frac{\cancel{(u-2)}\left(u^2+2u+4\right)}{\cancel{u-2}}\right]$$

$$\lim_{x\to 2}\frac{1-\sqrt{2x-3}}{2-\sqrt[3]{9-\sqrt{2x-3}}}\overset{u=2}{=}-12$$

3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[5]{x+1}-3\sqrt[6]{x+1}+2}{\sqrt[18]{x+1}+\sqrt[25]{x+1}-2}$.

Respuesta.

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[5]{x+1}-3\sqrt[6]{x+1}+2}{\sqrt[18]{x+1}+\sqrt[25]{x+1}-2}\overset{x=0}{=}\dfrac{0}{0},\ indeterminado$

Cambio de variable:

$$x+1=u^m$$

siendo: m el mínimo común múltiplo entre los índices de las raíces; es decir:

$$m = M.C.M\left\{5,6,18,25\right\}$$

$$m = 18\cdot 25$$

Por lo tanto, el cambio de variable queda:

$$x+1 = u^{18\cdot 25} \overset{x=0}{\Longrightarrow} u = 1$$

y por ello, nuestro límite es ahora:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[5]{x+1}-3\sqrt[6]{x+1}+2}{\sqrt[18]{x+1}+\sqrt[25]{x+1}-2} = \lim_{u\to 1}\frac{u^{90}-3u^{75}+2}{u^{25}+u^{18}-2}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[5]{x+1}-3\sqrt[6]{x+1}+2}{\sqrt[18]{x+1}+\sqrt[25]{x+1}-2} = \lim_{u\to 1}\frac{(u^{90}-1)-3(u^{75}-1)}{(u^{25}-1)+(u^{18}-1)}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[5]{x+1}-3\sqrt[6]{x+1}+2}{\sqrt[18]{x+1}+\sqrt[25]{x+1}-2} = \lim_{u\to 1}\frac{\cancel{(u-1)}\left[\left(u^{89}+u^{88}+\cdots+1\right)-3(u^{74}+u^{73}+\cdots+1)\right]}{\cancel{(u-1)}\left[\left(u^{24}+u^{23}+\cdots+1\right)+(u^{17}+u^{16}+\cdots+1)\right]}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[5]{x+1}-3\sqrt[6]{x+1}+2}{\sqrt[18]{x+1}+\sqrt[25]{x+1}-2} \overset{1}{=} \frac{90-3\cdot 75}{25+18}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[5]{x+1}-3\sqrt[6]{x+1}+2}{\sqrt[18]{x+1}+\sqrt[25]{x+1}-2} = -\frac{135}{43}$$