Ejercicios Resueltos: OVA 5

Ejercicio 1

I) Determínese los intervalos en los cuales cada una de las siguientes funciones es creciente y decreciente:

1) $y = x^4$.

Respuesta.

1°) Se deriva la función dada: $y' = 4x^3$.

2°) Se obtienen los Puntos Críticos (P.C): $y' = 0$; o sea:

$$4x^3 = 0 \Rightarrow x = 0$$

Por lo tanto:

$$P.C = \{0\}$$

3°) $P.C$ en la recta numérica (para la derivada):

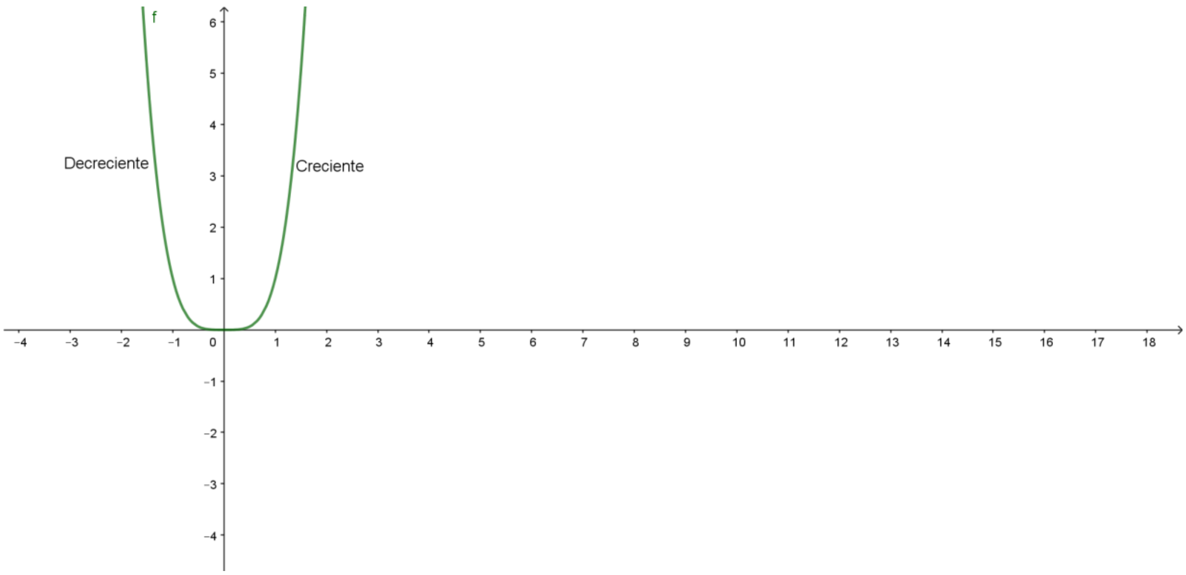
$-\infty$	-1	0	1 $+\infty$
$y' = 4x^3$	Negativa		Positiva
DECRECIENTE			CRECIENTE

Por lo tanto:

La función $y = x^4$:

$$Decreciente:]-\infty, 0]; \quad Creciente: [0, +\infty[$$

Verifiquemos lo que ha resultado al graficar la función usando Geogebra:



2) $f(x) = -\frac{x^3}{3} + \frac{5}{2}x^2 - 6x + 1$

Respuesta.

1°) Puntos Críticos.

$$f'(x) = -x^2 + 5x - 6 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ \vee \\ x = 3 \end{cases}$$

Por lo tanto:

$$P.C = \{2, 3\}$$

2°) Recta Numérica

$-\infty$ 0	2	2.5	3	4 $+\infty$
$f'(x) = -x^2 + 5x - 6$ Negativa		Positiva		Negativa

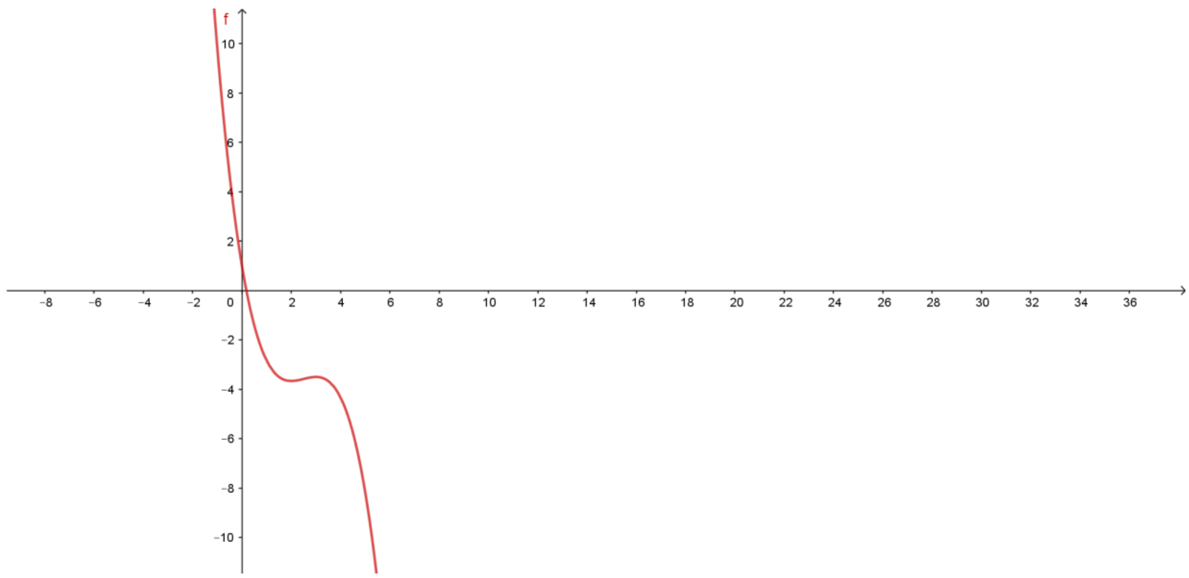
Por lo tanto:

La función $f(x) = -\frac{x^3}{3} + \frac{5}{2}x^2 - 6x + 1$ es:

Decreciente $]-\infty, 2] \cup [3, +\infty[$

Creciente $[2, 3]$

Gráficamente:



3) $f(x)=\dfrac{2x^2+9}{x^2-9}$.

<u>Respuesta.</u>

1°) P.C:

$$f\,'(x)=\frac{-54x}{(x^2-9)^2}=0$$

Por lo tanto:

$$P.C=\{-3,0,3\}$$

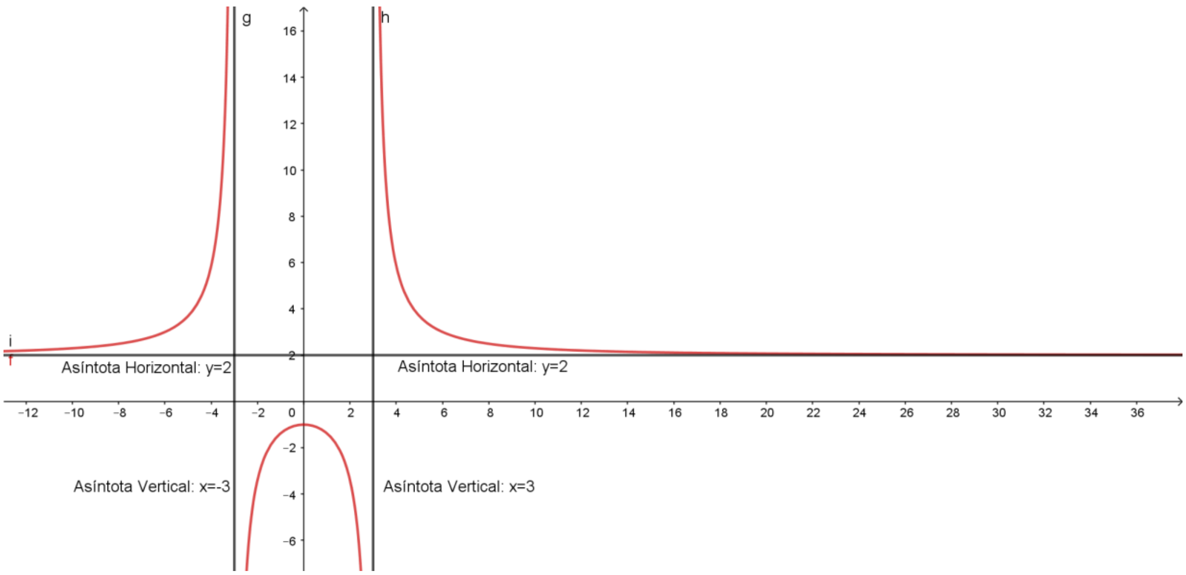
$-\infty$ -4	-3	-1	0	1	3	4 $+\infty$
$f\,'(x)=\dfrac{-54x}{(x^2-9)^2}$ Positiva		Positiva		Negativa		Negativa

Por lo tanto:

$f(x)=\dfrac{2x^2+9}{x^2-9}$ es:

Creciente $]-\infty,-3[\cup]-3,0]$; Decreciente $[0,3[\cup]3,+\infty[$

Gráfica:



Ejercicio 2

II) En las siguientes funciones determínese máximos y mínimos locales, aplicando el Criterio de la Primera Derivada:

1) $f(x)=-\dfrac{x^3}{3}+\dfrac{x^2}{2}+6x$

1°) $P.C.$

$$f'(x)=-x^2+x+6=0 \Rightarrow \begin{cases} x=-2 \\ \vee \\ x=3 \end{cases}$$

Por lo tanto:

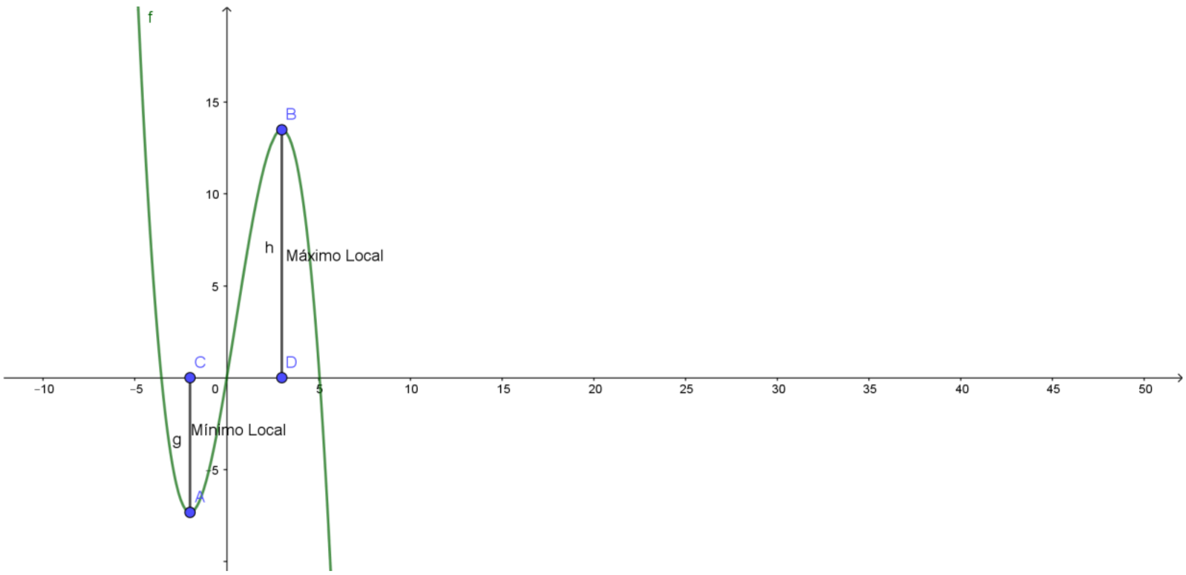
$$P.C=\{-2,3\}$$

2°) Recta Numérica:

$-\infty$ -3	-2	0	3	4 $+\infty$
$f'(x)=-x^2+x+6$ Negativa		Positiva		Negativa

de donde: $f(-2)=-\dfrac{26}{3}$ es un mínimo local y $f(3)=\dfrac{27}{2}$ es un máximo local

Gráfica:



2) $f(x)=\dfrac{x-1}{x^2-4}$.

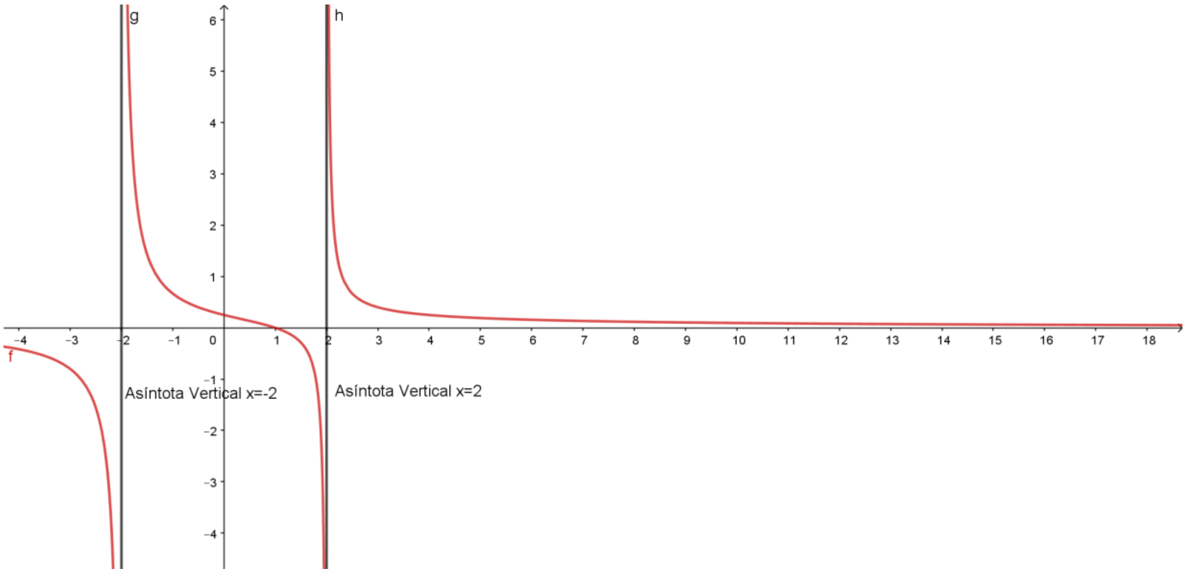
<u>Respuesta.</u>

1°) Puntos Críticos (P.C).

$$f'(x)=-\frac{x^2-2x+4}{\left(x^2-4\right)^2}=0\ ;\ x\neq \pm 2\,.$$

Como $x^2-2x+4>0$, $\forall x\in\mathbb{R}$, entonces $f'(x)<0$, lo que significa que $f(x)=\dfrac{x-1}{x^2-4}$ es Decreciente en $\mathbb{R}$. Por lo tanto, esta función no tiene máximo ni mínimo local.

Gráfica:



3) $f(x)=\dfrac{x^4+1}{x^4-1}$

<u>Respuesta.</u>

1°) Puntos Críticos (P.C).

$$f'(x)=-\frac{8x^3}{\left(x^4-1\right)^2}=0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ \vee \\ x=\pm 1 \end{cases}$$

Por lo tanto:

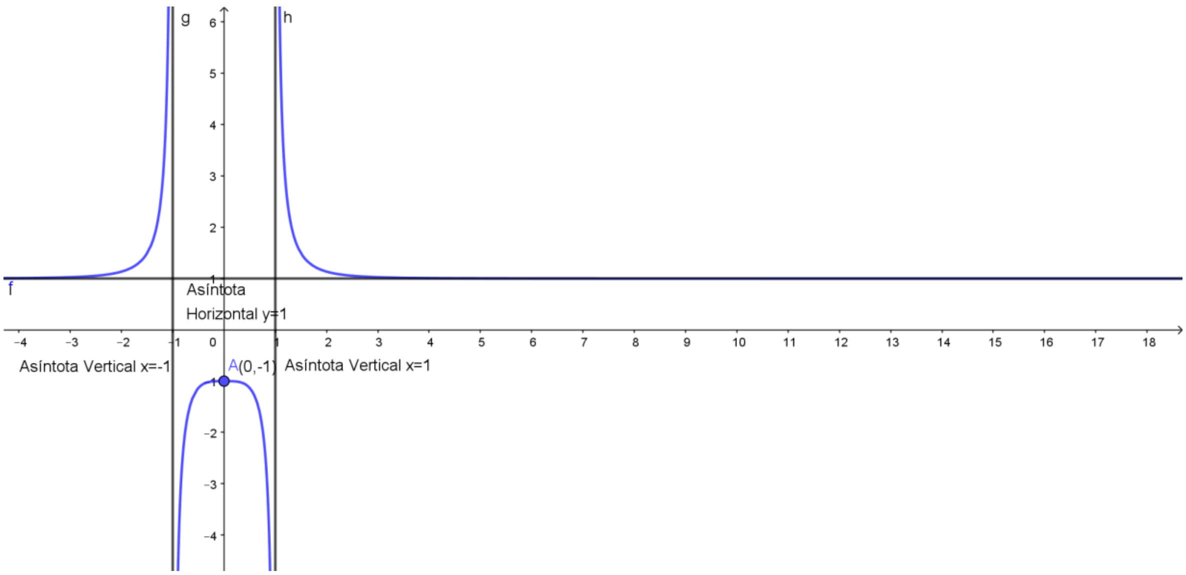
$$P.C=\{-1,0,1\}$$

2°) Recta Numérica.

$-\infty$ -2	-1	-1/2	0	1/2	1	2 $+\infty$
$f'(x)=-\dfrac{8x^3}{\left(x^4-1\right)^2}$ Positiva		Positiva		Negativa		Negativa

de donde: $f(0)=-1$ es un Máximo Local.

Gráfica:


g
h
f
Asíntota
Horizontal y=1
Asíntota Vertical x=-1
A(0,-1)
Asíntota Vertical x=1