Ejercicios Resueltos: OVA 4

Ejercicio 1

Dada la función $f(x)=x^2-4x+7$, determine la pendiente que tiene su gráfica en el punto en $x=1$.

Respuesta

De acuerdo a la interpretación geométrica de la derivada:

$$\boxed{m_{\tan g\ en\ x_0}=\frac{d}{dx}\left[f\left(x_0\right)\right]}$$

se tiene

$$\frac{d}{dx}\left[f\left(x\right)\right]=\underbrace{\frac{d}{dx}\left[x^2-4x+7\right]}_{2x-4}$$

$$\underbrace{\frac{d}{dx}\left[f\left(x\right)\right]_{x=1}}_{f'(1)}=\underbrace{\left[2x-4\right]_{x=1}}_{-2}$$

$$f'(1) = -2$$

Por lo tanto, la pendiente que tiene la gráfica de la función $f(x)=x^2-4x+7$ en el punto $x=1$ es: -2.

➢ *Ejercicio 2*

Verifique que el resultado obtenido en el ejercicio 1) anterior es el mismo al trazar en su gráfica la recta tangente en dicho punto resulta de **inclinación hacia la izquierda** puesto que su pendiente (derivada) es **negativa.**

Respuesta

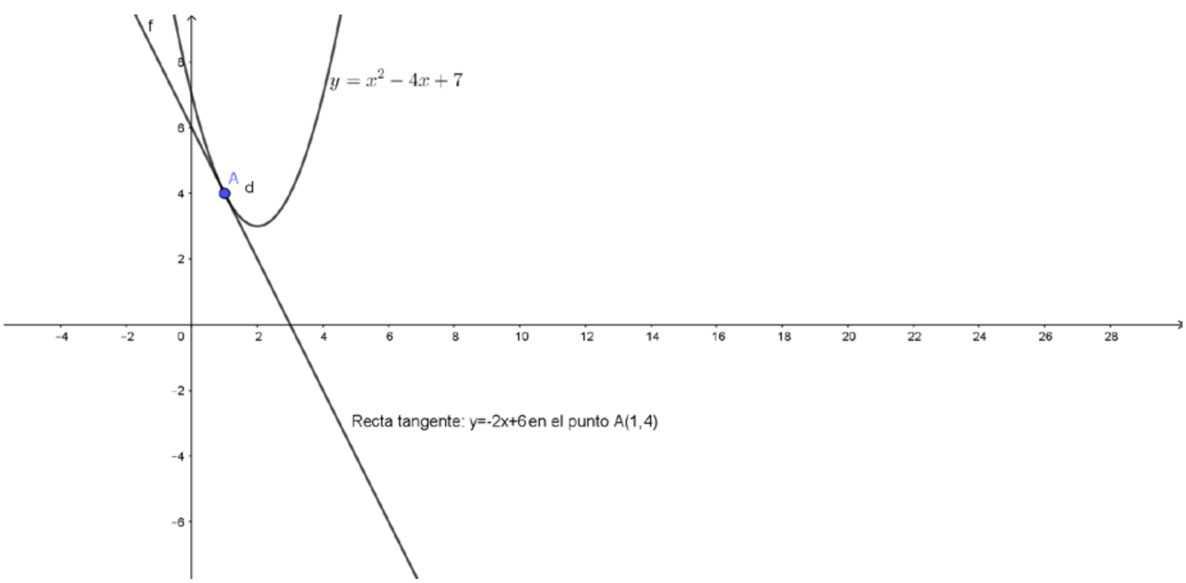
Como la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $y = f(x)$ en un punto x_0 está dada por

$$\boxed{y - f(x_0) = f'(x_0)\left(x - x_0\right)}$$

y en el ejercicio anterior la función es $f(x) = x^2 - 4x + 7$ y con ello $f'(1) = -2$; $f(1) = 4$, la ecuación de la recta tangente es:

$$y - \underbrace{f(1)}_{4} = \underbrace{f'(1)}_{-2}\left(x - 1\right)$$
$$y - 4 = -2(x - 1)$$

con lo que gráficamente queda:



➢ *Ejercicio 3*

Dada la función $f(x)=\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}-2x$; hállese los puntos en los cuales las rectas tangentes son **paralelas** al Eje X.

Respuesta

Como las rectas tangentes son paralelas al Eje X, entonces las respectivas pendientes son iguales a **cero** y con ello también las derivadas son iguales a **cero**:

$$f(x)=\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}-2x \Rightarrow f'(x)=\underbrace{x^2-x-2}_{(x+1)(x-2)}=0$$

$$f'(x)=(x+1)(x-2)=0 \Rightarrow \begin{cases} x=-1 \\ \vee \\ x=2 \end{cases}$$

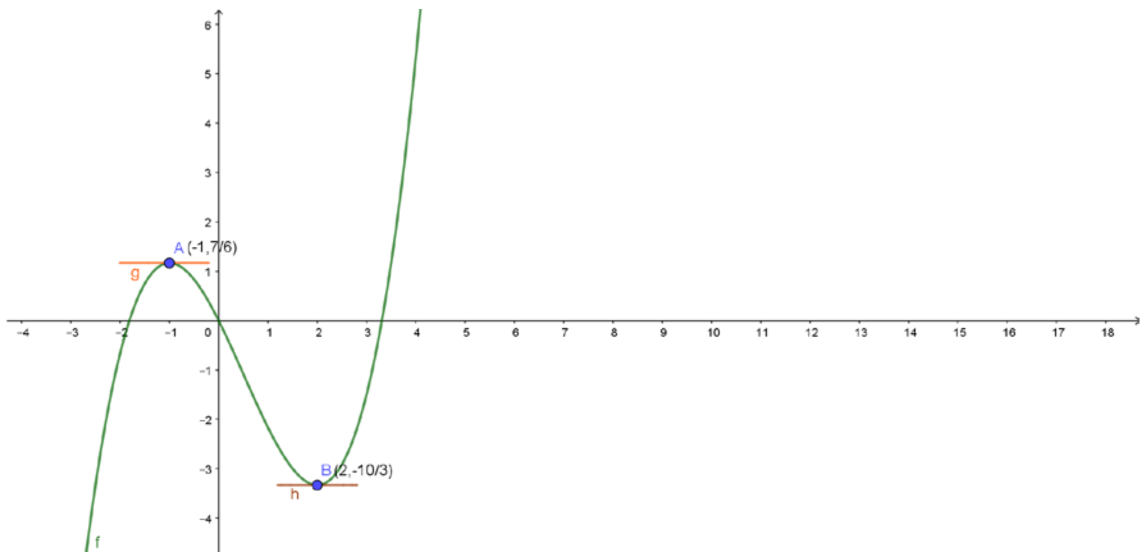
Por lo tanto, los puntos en que las rectas tangentes son paralelas al Eje X son:

$$A\left(-1,\frac{7}{6}\right);\ B\left(2,-\frac{10}{3}\right).$$

➢ *Ejercicio 4*

Recurra a Geogebra para graficar la función del ejemplo anterior, y con ello verificar el resultado obtenido.

Respuesta



➢ *Ejercicio 5*

Calcule el área del triángulo formado por la recta tangente trazada a la gráfica de la función $f(x) = 4x - x^2$ en el punto (1,3) y los Ejes Coordenados.

Respuesta

$$f(x) = 4x - x^2 \Rightarrow f'(x) = 4 - 2x$$
$$f'(1) = 2$$

a) Ecuación recta tangente:

$$y - \underbrace{f(1)}_{3} = \underbrace{f'(1)}_{2}(x-1)$$
$$y - 3 \quad = 2(x-1)$$

b) Interceptos Ejes Coordenados:

b.1) Eje X: $y=0$

$$x=-\frac{1}{2}$$

b.2) Eje Y: $x=0$

$$y=1$$

Por lo tanto, el área del triángulo rectángulo $a(\Delta)$ pedido es:

$$a(\Delta)=\frac{\left|\text{int}\,ercepto\ eje\ X\right|\cdot\left|\text{int}\,ercepto\ eje\ Y\right|}{2}$$

$$a(\Delta)=\frac{\left|-1/2\right|\cdot\left|1\right|}{2}$$

$$a(\Delta)=\frac{1}{4}\left[u^2\right];\ u,\ unidad\ de\ longitud$$