Ejercicios Resueltos: OVA 3

➢ *Ejercicio 1*

Determinar la gráfica, dominio y recorrido de la función:

$$f(x)=\begin{cases} -3 & si \quad x<-2 \\ x & si \quad -2\le x\le 2 \end{cases}$$

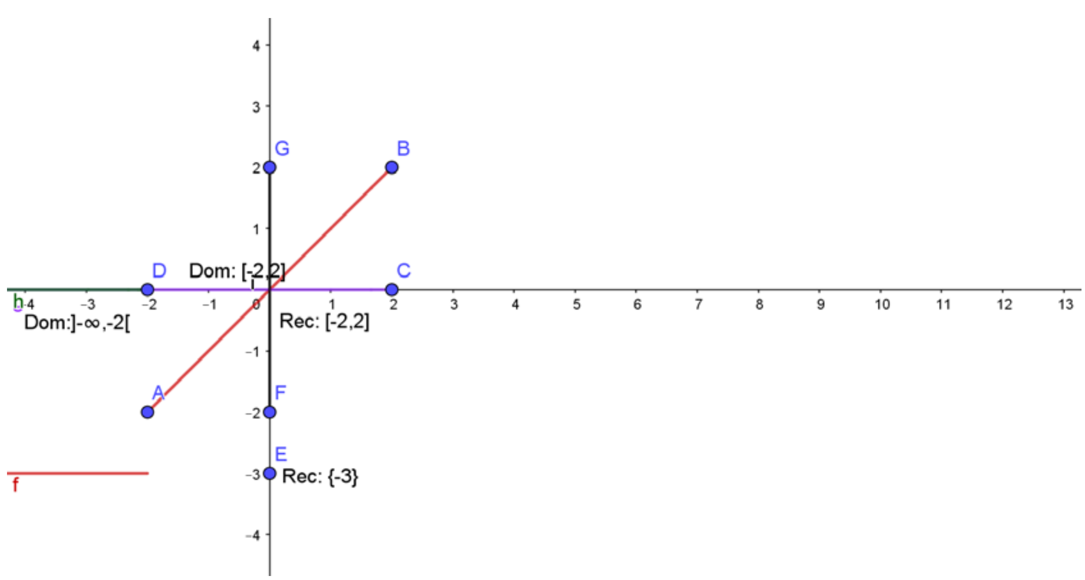
Respuesta

Esta función está definida por trozos en los intervalos:

a) $\left]-\infty,-2\right[$: $f(x)=-3$, cuya gráfica es un trozo de la función constante, recta paralela al eje X.

b) $\left[-2,2\right]$: $f(x)=x$, cuya gráfica es un trozo de la función lineal de pendiente $m=1$(función creciente) y coeficiente de posición $b=0$.

Estas situaciones nos llevan a trazar la gráfica de la función dada:



de donde:

$$Dom(f(x)) =]-\infty, -2[\cup [-2, 2]$$
$$Rec(f(x)) = \{-3\} \cup [-2, 2]$$

➢ *Ejercicio 2*

Determinar la gráfica, dominio y recorrido de la función

$$f(x) = \begin{cases} -2x+1 & si \quad -3 \leq x < 2 \\ 8 & si \quad 2 \leq x \leq 4 \\ \sqrt{x-4} & si \quad 4 < x \leq 8 \end{cases}$$

Respuesta

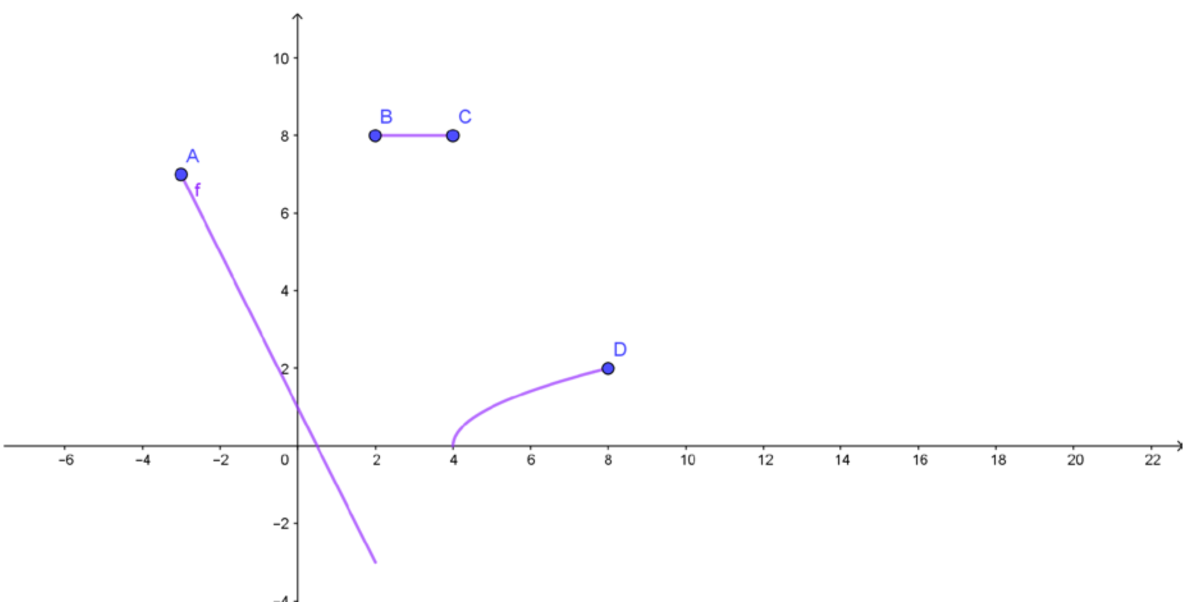
Es una función definida por trozos, por lo cual en cada intervalo:

a) $[-3, 2[$: $f(x) = -2x+1$, es un trozo de la gráfica de la función lineal de pendiente $m = -2$ (decreciente) y coeficiente de posición $b = 1$.

b) $[2, 4]$: $f(x) = 8$, es un trozo de la gráfica de la función constante.

c) $]4, 8]$: $f(x) = \sqrt{x-4}$, es un trozo de la función raíz cuadrada principal.

Por lo tanto, la gráfica de la función dada queda:



Por lo tanto:

$$Dom\left(f(x)\right)=[-3,2[\cup[2,4]\cup]4,8]$$

$$\operatorname{Re}c\left(f(x)\right)=\underbrace{]-3,7]\cup]0,,2]}_{]-3,7]}\cup\{8\}$$

$$\operatorname{Re}c\left(f(x)\right)=]-3,7]\cup\{8\}$$

➢ *Ejercicio 3*

Determine la gráfica, dominio y recorrido de la función

$$f(x)=\begin{cases}\sqrt{4-x} & si \quad -5\le x<0\\ -x^2+4x & si \quad 0\le x<4\\ |x-4| & si \quad 4\le x\end{cases}$$

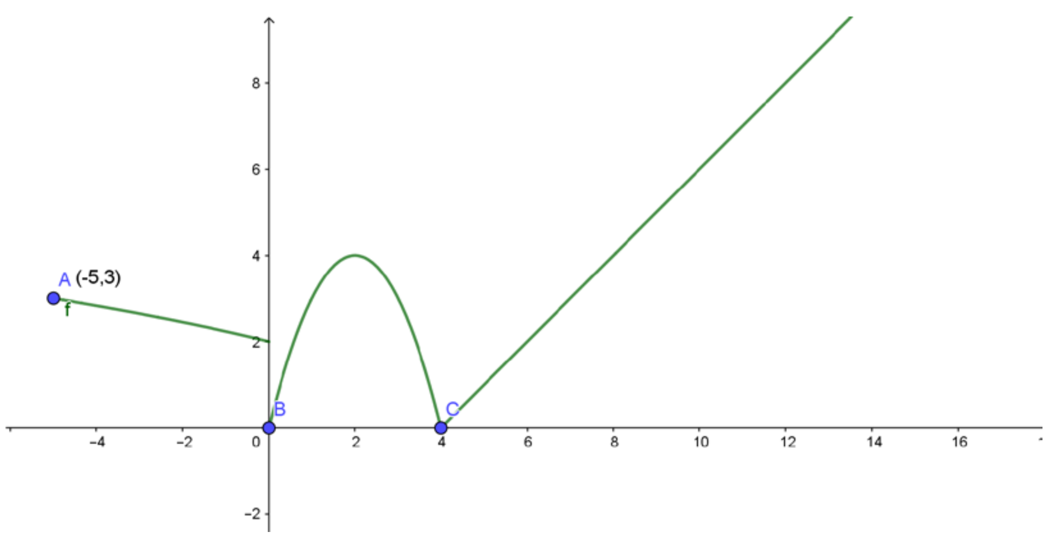
Respuesta

a) Intervalo: $[-5,0[$, trozo de la función raíz cuadrada principal $f(x)=\sqrt{4-x}$ y como su dominio se obtiene de $4-x\ge 0\Rightarrow x\le 4$, entonces su dominio es en este intervalo: $[-5,0[$.

b) Intervalo: $[0,4[$, trozo de la función cuadrática $f(x)=-x^2+4x$ cuyo dominio es $\mathbb{R}$, por lo que este intervalo es su dominio. Su vértice es $(2,4)$.

c) Intervalo: $[4,+\infty[$, trozo de la función valor absoluto $f(x)=|x-4|$ cuyo dominio es $\mathbb{R}$, por lo que este intervalo es su dominio.

Por lo tanto, su gráfica es:



obteniéndose:

$$
\begin{aligned}
&Dom\left(f(x)\right)=\left[-5,0\right[\cup\left[0,4\right[\cup\left[4,+\infty\right[\\
&\operatorname{Re}c\left(f(x)\right)=\underbrace{\left]-2,3\right]\cup\left[0,4\right]\cup\left[0,+\infty\right[}_{\left[0,+\infty\right[}\\
&\operatorname{Re}c\left(f(x)\right)=\left[0,+\infty\right[
\end{aligned}
$$

➢ *Ejercicio 4*

Calcular, si existe, $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$, si:

$$
f(x)=\begin{cases} x^2-6x+8 & si \quad x<2 \\ \\ \sqrt{4-2x} & si \quad x>2 \end{cases}
$$

Respuesta

Como se trata de una función por trozos, entonces la respuesta al cálculo de este límite es a través de los **límites laterales**.

En efecto:

a) Límite lateral por la izquierda:

$$\lim_{x\to 2^-} f(x)=\lim_{x\to 2^-}\left(x^2-6x+8\right)$$

$$\lim_{x\to 2^-} f(x)\overbrace{=}^{x=2}0$$

b) Límite lateral por la derecha:

$$\lim_{x\to 2^+} f(x)=\lim_{x\to 2^+}\sqrt{4-2x}$$

$$\lim_{x\to 2^+} f(x)\overbrace{=}^{x=2}0$$

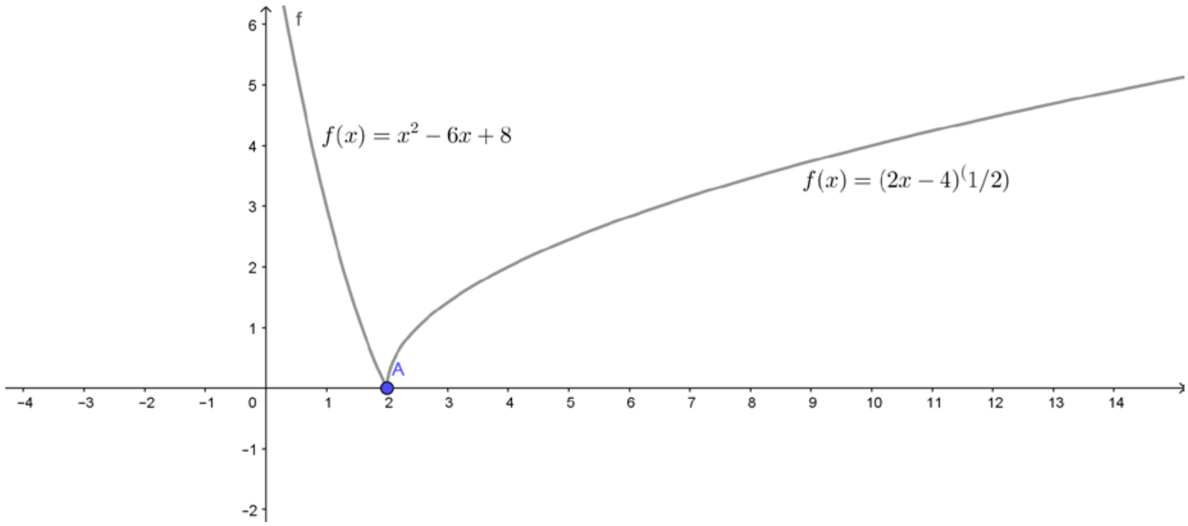
Por lo tanto:

$$\lim_{x\to 2^-} f(x)=\lim_{x\to 2^+} f(x)=0$$

y con ello:

$$\lim_{x\to 2} f(x) = 0 \text{, existe.}$$

Por tratarse de una función a trozos de funciones conocidas, entonces mostraremos gráficamente este resultado obtenido:



➢ *Ejercicio 5*

Calcular, si existe, $\lim_{x\to 1} f(x)$, sabiendo que:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 1}{x - 1} & si \quad x < 1 \\ \\ \dfrac{\sqrt{2x-1} - 1}{x^2 - 3x + 2} & si \quad x > 1 \end{cases}$$

Respuesta

a) Límite Lateral por la izquierda:

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-}\left(\frac{x^2 - 1}{x - 1}\right)$$

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-}\left(\frac{(x+1)\cancel{(x-1)}}{\cancel{x-1}}\right)$$

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) \overset{\overbrace{}^{x=1}}{=} 2$$

Por lo tanto:

$$\lim_{x\to 1^-} f(x)=2$$

b) Límite Lateral por la derecha:

$$\lim_{x\to 1^+} f(x)=\lim_{x\to 1^+}\frac{\sqrt{2x-1}-1}{x^2-3x+2}$$
$$\lim_{x\to 1^+} f(x)=\lim_{x\to 1^+}\left[\frac{\sqrt{2x-1}-1}{(x-1)(x-2)}\cdot\frac{\sqrt{2x-1}+1}{\sqrt{2x-1}+1}\right]$$
$$\lim_{x\to 1^+} f(x)=\lim_{x\to 1^+}\left[\frac{2x-1-1}{(x-1)(x-2)}\cdot\frac{1}{\sqrt{2x-1}+1}\right]$$
$$\lim_{x\to 1^+} f(x)=\lim_{x\to 1^+}\left[\frac{2\cancel{(x-1)}}{\cancel{(x-1)}(x-2)}\cdot\frac{1}{\sqrt{2x-1}+1}\right]$$
$$\lim_{x\to 1^+} f(x)\overbrace{=}^{x=1}-1$$

Por lo tanto:

$$\lim_{x\to 1^+} f(x)=-1.$$

Como los límites laterales resultaron **distintos**, entonces:

$\lim\limits_{x\to 1} f(x)$, no existe.

➢ *Ejercicio 6*

Calcular, si existe, $\lim\limits_{x\to -2} f(x)$ sabiendo que:

$$(x)=\begin{cases}\dfrac{x^3-7x-6}{2x^3-x^2-8x+4} & si \quad x<-2\\[2ex] -\dfrac{3}{32}\cdot\dfrac{\sqrt{1-4x}-3}{\sqrt{3+x}-1} & si \quad x>-2\end{cases}$$

Respuesta

a) Límite Lateral por la izquierda:

$$\lim_{x\to -2^-} f(x) = \lim_{x\to -2^-} \frac{x^3-7x-6}{2x^3-x^2-8x+4}$$

$$\lim_{x\to -2^-} f(x) = \lim_{x\to -2^-} \frac{\cancel{(x+2)}\left(x^2-2x-3\right)}{\cancel{(x+2)}\left(2x^2-5x+2\right)}$$

$$\lim_{x\to -2^-} f(x) = \frac{1}{4}$$

b) Límite Lateral por la derecha:

$$\lim_{x\to -2^+} f(x) = \lim_{x\to -2^+} \left[-\frac{3}{32}\cdot\frac{\sqrt{1-4x}-3}{\sqrt{3+x}-1}\right]$$

$$\lim_{x\to -2^+} f(x) = -\frac{3}{32}\cdot \lim_{x\to -2^+} \left[\frac{\sqrt{1-4x}-3}{\sqrt{3+x}-1}\cdot\frac{\sqrt{1-4x}+3}{\sqrt{3+x}+1}\cdot\frac{\sqrt{3+x}+1}{\sqrt{1-4x}+3}\right]$$

$$\lim_{x\to -2^+} f(x) = -\frac{3}{32}\cdot \lim_{x\to -2^+} \left[\frac{1-4x-9}{3+x-1}\cdot\frac{\sqrt{3+x}+1}{\sqrt{1-4x}+3}\right]$$

$$\lim_{x\to -2^+} f(x) = -\frac{3}{32}\cdot \underbrace{\lim_{x\to -2^+} \left[\frac{-4\cancel{(x+2)}}{\cancel{x+2}}\cdot\frac{\sqrt{3+x}+1}{\sqrt{1-4x}+3}\right]}_{-\frac{8}{3}}$$

$$\lim_{x\to -2^+} f(x) \overbrace{=}^{x=-2} -\frac{3}{32}\cdot\left(-\frac{8}{3}\right)$$

$$\lim_{x\to -2^+} f(x) \overbrace{=}^{x=-2} \frac{1}{4}$$

Por lo tanto, los límites laterales son iguales, lo que significa que:

$\lim_{x\to -2} f(x) = \frac{1}{4}$, existe.