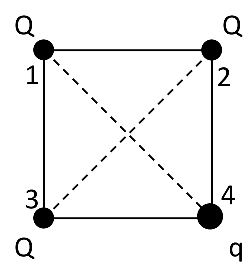
Ejercicios Desarrollados:
Energía potencial eléctrica y potencial eléctrico

➢ *Ejercicio 1*

Se tiene un cuadrado de lado L = 1,0 [m] y en cada uno de tres vértices hay cargas iguales Q = 10 [μC]. Encuentre el trabajo requerido para trasladar una carga puntual q = - 5,0 [μC] desde el cuarto vértice al centro del cuadrado.

Solución

La energía potencial para el estado inicial del sistema es



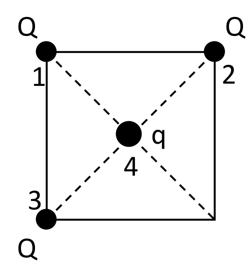
Situación Inicial

$$U_i = U_{12} + U_{13} + U_{14} + U_{23} + U_{24} + U_{34}$$

$$U_i = \frac{kQ^2}{L} + \frac{kQ^2}{L} + \frac{kQq}{\sqrt{2}L} + \frac{kQ^2}{\sqrt{2}L} + \frac{kQq}{L} + \frac{kQq}{L}$$

$$U_i = \frac{2kQ^2}{L} + \frac{2kQq}{L} + \frac{kQ^2}{\sqrt{2}L} + \frac{kQq}{\sqrt{2}L}$$

La energía potencial para el estado final del sistema es



Situación Final

$$U_f = U'_{12} + U'_{13} + U'_{14} + U'_{23} + U'_{24} + U'_{34}$$

$$U_f = \frac{kQ^2}{L} + \frac{kQ^2}{L} + \frac{2kQq}{\sqrt{2}L} + \frac{kQ^2}{\sqrt{2}L} + \frac{2kQq}{\sqrt{2}L} + \frac{2kQq}{\sqrt{2}L}$$

$$U_f = \frac{2kQ^2}{L} + \frac{6kQq}{\sqrt{2}L} + \frac{kQ^2}{\sqrt{2}L}$$

El trabajo pedido es

$$W = U_f - U_i = \frac{5kQq}{\sqrt{2}L} - \frac{2kQq}{L}$$

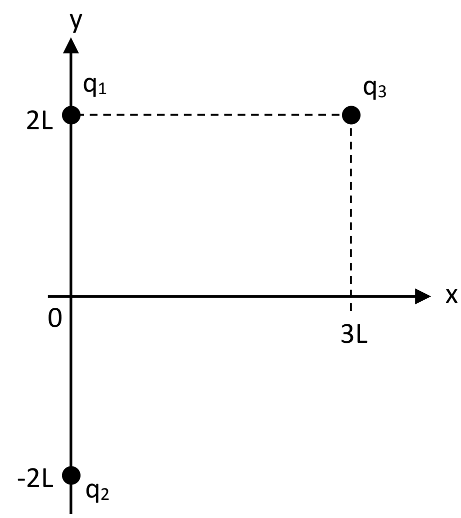
$$W = -\frac{5 \cdot 9 \cdot 10^9 \cdot 50 \cdot 10^{-12}}{\sqrt{2}} + \frac{2 \cdot 9 \cdot 10^9 \cdot 50 \cdot 10^{-12}}{1} = -0,69[J]$$

Otra manera de resolver esta situación es a partir de la diferencia de potencial, puesto que $W = q\Delta V$. Aquí se determina el potencial en el punto donde está la carga q tanto inicial como finalmente. Por tanto,

$$V_i = \frac{kQ}{\sqrt{2}L} + \frac{2kQ}{L}$$
$$V_f = \frac{3 \cdot 2kQ}{\sqrt{2}L}$$
$$\Delta V_{i,f} = \frac{5kQ}{\sqrt{2}L} - \frac{2kQ}{\sqrt{2}L}$$
$$W = (3,818 - 2,436) \cdot 10^5 \cdot (-5,0 \cdot 10^{-6}) = -0,69[J]$$

Ejercicio 2

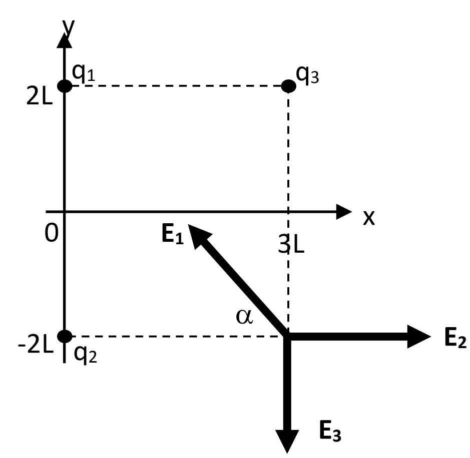
Un sistema está constituido por tres cargas puntuales: $q_1 = -6Q$; $q_2 = +4Q$ y, q_3, de magnitud y signo desconocidos. Estas cargas se ubican en el plano xy, en los puntos (0; 2L), (0; -2L) y (3L; 2L), tal como se muestra en la figura adjunta.



Determinar:

a. La magnitud y signo de la carga q_3, de modo que el potencial sea cero en el origen del sistema de coordenadas.
b. El campo eléctrico resultante (vector) en el punto (3L; -2L)

Solución



a. En el origen O,

$$V = -\frac{6kQ}{2L} + \frac{4kQ}{2L} + \frac{kq_3}{\sqrt{9L^2 + 4L^2}} = 0$$
$$-Q + \frac{q_3}{\sqrt{13}} = 0$$
$$q_3 = +\sqrt{13}Q = +3,6Q$$

b. En el punto (3L; -2L),

$$\vec{E}_1 = \frac{kq_1}{r_1^2}(-\cos\alpha\hat{i} + sen\alpha\,\hat{j}) = \frac{6kQ}{(5L)^2}(-\frac{3}{5}\hat{i} + \frac{4}{5}\hat{j})$$

$$\vec{E}_2 = \frac{kq_2}{r_2^2}\hat{i} = \frac{4kQ}{(3L)^2}\hat{i} = \frac{4kQ}{9L^2}\hat{i}$$

$$\vec{E}_3 = \frac{kq_3}{r_3^2}(-\hat{j}) = \frac{\sqrt{13}kQ}{(4L)^2}(-\hat{j}) = -\frac{\sqrt{13}kQ}{16L^2}\hat{j}$$

Luego,

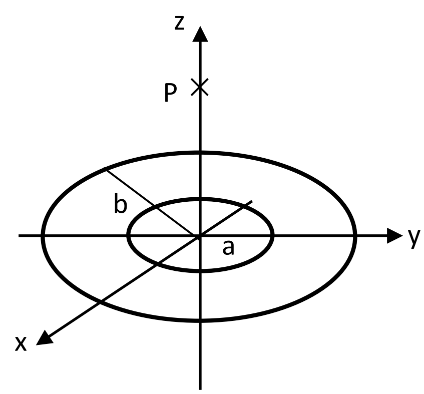
$$\vec{E} = \frac{kQ}{L^2}\left(-\frac{18}{125} + \frac{4}{9}\right)\hat{i} + \frac{kQ}{L^2}\left(\frac{24}{125} - \frac{3,6}{16}\right)\hat{j} = \frac{kQ}{L^2}\left(0,30\hat{i} - 0,03\hat{j}\right)$$

➢ *Ejercicio 3*

En el plano XY y centrado en el origen, hay dos anillos de radios a = 1 m y b = 2 m. El anillo de radio b posee una densidad de carga $\lambda_\beta = 10\ \mu C/m$.

Determine:

a. el potencial eléctrico en un punto P, situado a 5 m sobre el eje Z, debido al anillo de radio b,
b. la densidad lineal de carga del anillo de radio a, para que el potencial eléctrico en el punto P sea igual a cero.



Solución

a. El potencial en P debido a un elemento de carga del anillo de radio b está dado por:

$$dV = \frac{kdq}{\sqrt{h^2 + b^2}}\ ,$$

donde "h" es la distancia desde el plano XY al punto P, y

$$dq = \lambda_b d\ell$$

Integrando sobre el anillo:

$$V_b = \int \frac{k\lambda_b d\ell}{\sqrt{h^2 + b^2}} = \frac{k\lambda_b}{\sqrt{h^2 + b^2}} \int d\ell = \frac{k\lambda_b \cdot 2\pi b}{\sqrt{h^2 + b^2}} = \frac{2\pi k\lambda_b b}{\sqrt{h^2 + b^2}}$$

$$V_b = \frac{2\pi \cdot 9 \cdot 10^9 \cdot 10 \cdot 10^{-6} \cdot 2}{\sqrt{5^2 + 2^2}} = 2{,}1 \cdot 10^5 V$$

b. Para que el potencial en P sea igual a cero debe cumplirse:

$$V_a + V_b = 0$$,

donde el potencial debido al anillo de radio b se conoce y el potencial debido al anillo de radio a está dado por:

$$V_a = \frac{2\pi k\lambda_a a}{\sqrt{h^2 + a^2}} = -V_b$$,

similar a la relación encontrada en (a) para el anillo de radio b.

Despejando de ecuación anterior:

$$\lambda_a = -\frac{V_b \sqrt{h^2 + a^2}}{2\pi k a} = -\frac{2{,}1 \cdot 10^5 \sqrt{5^2 + 1^2}}{2\pi \cdot 9 \cdot 10^9 \cdot 1} = -19 \frac{\mu C}{m}$$