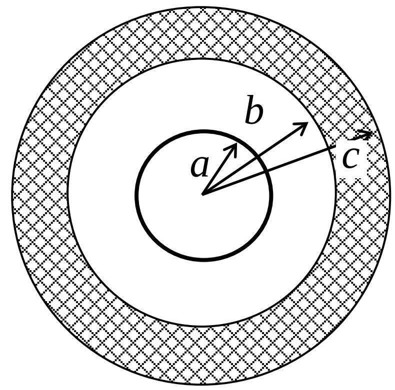
Ejercicios Desarrollados: Ley de Gauss

➢ *Ejercicio 1*



Un cascarón delgado esférico de radio *a*, se encuentra rodeado concéntricamente por un cascarón metálico grueso de radio interno *b* y externo *c*. Se sabe que el cascarón grueso tiene carga nula y el cascarón delgado posee una densidad superficial de carga σ constante.

Determine:

a. La densidad superficial de carga en la cara interior y exterior del cascaron metálico grueso.

El campo eléctrico a una distancia r, del centro de las esferas cuando:

b. $r < a$
c. $a < r < b$
d. $b < r < c$
e. $r > c$

Solución

a.

Para el cascarón delgado:

$$Q = \sigma A = \sigma 4\pi a^2$$

Al interior del cascaron grueso:

$$\left|\vec{E}\right| = 0 \rightarrow \phi = 0 \rightarrow Q_{encerrada} = 0 = Q + Q_{\text{int}}$$

$$\sigma_{\text{int}} = -\frac{Q}{A_{\text{int}}} = -\frac{\sigma 4\pi a^2}{4\pi b^2} = -\frac{\sigma a^2}{b^2}$$

Para el cascaron grueso: $Q_{neta} = 0 = Q_{ext} + Q_{\text{int}}$

$$\sigma_{ext} = \frac{Q}{A_{ext}} = \frac{\sigma 4\pi a^2}{4\pi c^2} = \frac{\sigma a^2}{c^2}$$

Para determinar el campo eléctrico, se elige una superficie Gaussiana esférica de radio r. en este caso, $\vec{E}$ y $\hat{n}$ son paralelos y $|\vec{E}|$ constante a la misma distancia r, entonces:

$$\phi = \oint_S \vec{E} \cdot \hat{n} dA = \oint_S |\vec{E}||\hat{n}| \cos\theta dA = |\vec{E}| \oint_S dA = |\vec{E}| 4\pi r^2$$

b. Para r < a

$$Q_{encerrada} = 0 \rightarrow \phi = 0 \rightarrow |\vec{E}| = 0$$

c. *a < r < b*

$$\phi = |\vec{E}| 4\pi r^2 = 4\pi k\sigma 4\pi a^2$$
$$|\vec{E}| = \frac{k\sigma\pi a^2}{r^2}$$

d. Para b < r < c

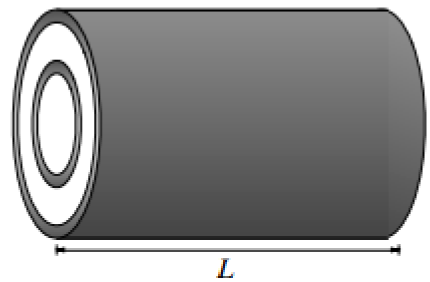
$$|\vec{E}| = 0$$

e. Para r > C

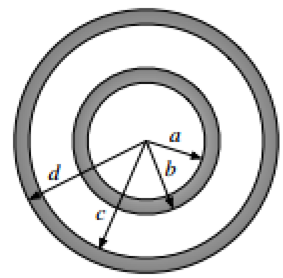
$$\phi = |\vec{E}| 4\pi r^2 = 4\pi k\sigma 4\pi a^2$$
$$|\vec{E}| = \frac{k\sigma\pi a^2}{r^2}$$

Ejercicio 2

Un sistema consiste de dos cascarones conductores cilíndricos concéntricos de longitud L >>> d (a, b, c, d definidos en la figura). El cascarón interior contiene una carga total +Q y el exterior una carga total −Q.



(a) Vista Exterior



(b) Vista Interior

Determine:

a. La densidad de carga en cada una de las cuatro superficies conductoras.
b. El campo eléctrico en todo el espacio.

Solución

a. Como $\vec{E}=\vec{0}$ al interior de un conductor, y $\phi = \oint_S \vec{E}\cdot\hat{n}dA = 4\pi k Q_{encerrada}$, entonces $\phi = 0$ y $Q_{encerrada}=0$, por tanto:

Para *r* =*a* $\sigma_a = 0$

Para *r* =*b* $\sigma_b = +\dfrac{Q}{2\pi bL}$

Para *r* =*c* $\sigma_c = -\dfrac{Q}{2\pi cL}$

Para *r* =*d* $\sigma_d = 0$

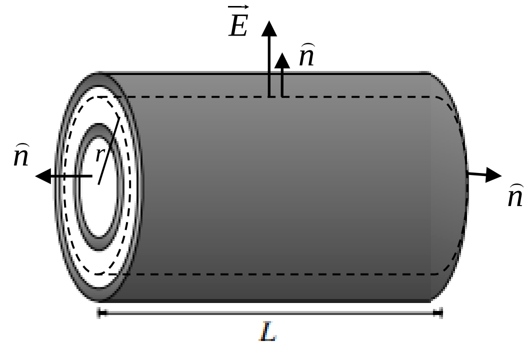
b. Calculo de campo eléctrico:

Tomando una superficie Gaussiana cilíndrica cuyo eje coincide con el eje del sistema de dos cascarones, y de radio r<a, la carga encerrada es nula, luego $\vec{E}=\vec{0}$ y para $a < r < b$ se está al interior de un conductor, luego $\vec{E}=\vec{0}$

Entonces:

Para r < b $\vec{E} = \vec{0}$

Tomando una superficie Gaussiana cilíndrica cuyo eje coincide con el eje del sistema de dos cascarones, y de radio b < r < c, como se muestra en la figura, $\vec{E}$ y $\hat{n}$ son paralelos en la parte curva del cilindro y $\left|\vec{E}\right|$ constante a la misma distancia r, entonces:



$$\phi = \oint_S \vec{E} \cdot \hat{n} dA = \int_{curva} \vec{E} \cdot \hat{n} dA + \int_{tapa1} \vec{E} \cdot \hat{n} dA + \int_{tapa2} \vec{E} \cdot \hat{n} dA = \int_{curva} \left|\vec{E}\right| \left|\hat{n}\right| \cos\phi dA = \left|\vec{E}\right| 2\pi r L$$

Y la carga encerrada es Q, por tanto

$$\phi = \left|\vec{E}\right| 2\pi r L = 4\pi k Q$$

Para b < r < c $\left|\vec{E}\right| = \dfrac{2kQ}{rL}$

Para c < r < d se está al interior de un conductor, luego $\vec{E} = \vec{0}$. Tomando la misma superficie Gaussiana pero de radio r>d, la carga encerrada es nula, y $\vec{E} = \vec{0}$. Entonces:

Para r > c $\vec{E} = \vec{0}$

Ejercicio 3

a. Usando la ley de Gauss, encuentre el campo eléctrico debido a un plano infinito cargado uniformemente con una densidad superficial σ.

Dos planos infinitos cargados son paralelos entre sí y paralelos al plano YZ. Uno está colocado en **x = - a** y tiene una densidad superficial de carga σ. El otro está colocado en **x = a** y tiene una densidad superficial de carga **-**σ. Determine:

b. el campo eléctrico para **–a < x < a**,
c. el campo eléctrico para **x > a**,

Solución

a. Al cerrar el interruptor S_1, los Se utilizará la ley de Gauss para determinar el campo eléctrico, en este caso: por simetría el campo debe ser perpendicular al plano y debe tener el mismo valor en puntos situados a la misma distancia a uno y otro lado del plano. Las líneas de campo salen del plano si σ es positivo y llegan al plano si σ es negativo.

Se elige como superficie gaussiana un cilindro con su eje perpendicular al plano, con su centro en el plano. Las caras del cilindro son paralelas al plano, de área A. No existe flujo a través del manto del cilindro. Sí a través de las caras basales.

Por lo tanto:

$$\phi = \oint \vec{E} \bullet d\vec{A} = 2\oint E \cdot dA = 2E\oint dA = 2E \cdot A$$

Y la carga interior es: $Q_{\text{int}} = \sigma A$

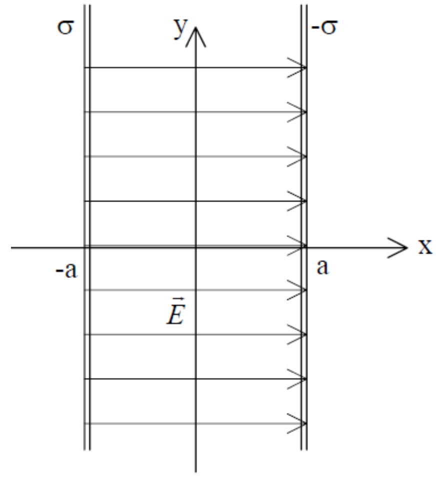
Entonces:

$$\phi = 2E \cdot A = 4\pi k \sigma A$$

$$E = 2\pi k \sigma$$

Este resultado también se expresa como: $E = \dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}$, e indica que el campo no depende de la distancia al plano.

b. Campo eléctrico para –a < x < a:



Sea $\vec{E}_1$ el campo debido al plano ubicado en x = -a y $\vec{E}_2$ el campo debido al plano en x = a. Usando el resultado obtenido en a):

$$\vec{E}_1 = 2\pi k\sigma\hat{i}$$

$$\vec{E}_2 = 2\pi k\sigma\hat{i}$$

Por lo tanto:

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 = 4\pi k\sigma\hat{i} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\hat{i}$$

c. Campo eléctrico para x > a:

$$\vec{E}_1 = 2\pi k\sigma\hat{i}$$

$$\vec{E}_2 = -2\pi k\sigma\hat{i}$$

Por lo tanto:

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 = \vec{0}$$