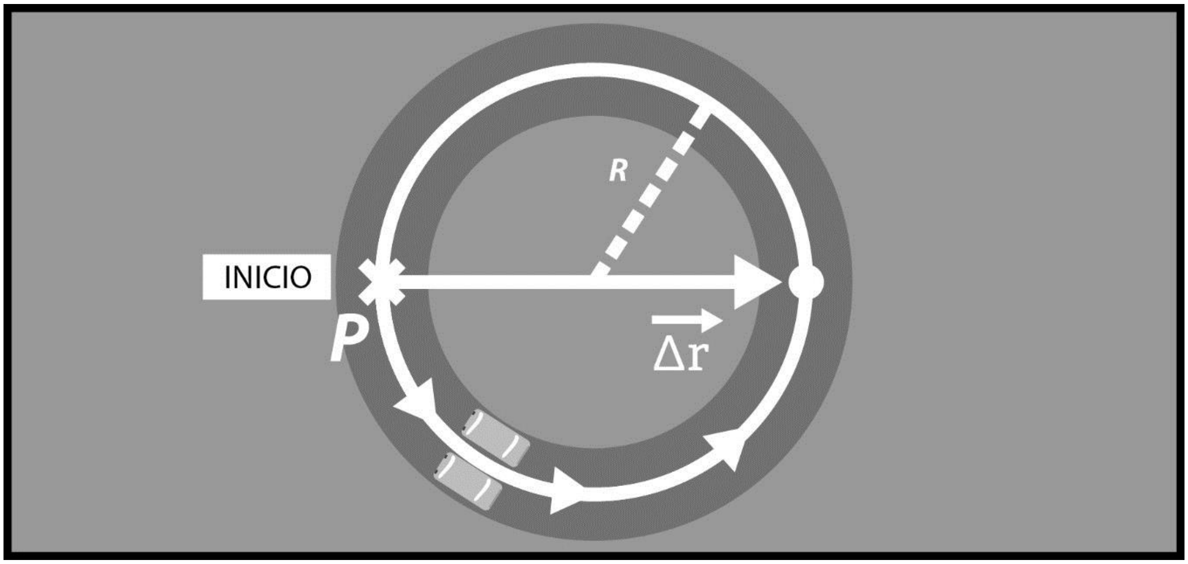
Ejercicios Resueltos: Conceptos de Cinemática de una Partícula

Ejercicio 1



En una carrera de automóviles, un vehículo tarda 10[s] en recorrer la mitad de una pista circular de radio 100[m]. Considere al vehículo como una partícula y determine: a) la rapidez media y la magnitud de la velocidad media para la primera mitad del recorrido; b) la rapidez media y la magnitud de la velocidad media para la primera vuelta completa, si tarda 6[s] en la segunda media vuelta; c) una relación entre la rapidez media y la magnitud de la velocidad media.

Solución

a) En la figura se muestra la situación planteada, donde se observa el camino recorrido por el vehículo y el vector desplazamiento para la primera media vuelta. En este caso, la distancia recorrida corresponde a medio perímetro de una circunferencia, es decir la rapidez media es

$$v_m = \frac{distancia}{tiempo}$$

$$v_m = \frac{\pi \cdot R}{t} = \frac{\pi \cdot 100}{10} = 10 \cdot \pi \left[m/s \right] = 31,4 \left[m/s \right]$$

Como la magnitud o módulo del desplazamiento corresponde a dos veces el radio de la circunferencia, entonces el módulo de la velocidad media es

$$\left|\vec{v}_m\right| = \frac{\left|\Delta\vec{r}\right|}{\Delta t}$$

$$\left|\vec{v}_m\right| = \frac{2R}{t} = \frac{2\cdot 100}{10} = 20\left[m/s\right]$$

b) En este caso, la distancia recorrida corresponde al perímetro de una circunferencia, y la rapidez media para la vuelta completa es

$$v_m = \frac{distancia}{tiempo}$$

$$v_m = \frac{2\cdot\pi\cdot R}{t_T} = \frac{2\cdot\pi\cdot 100}{10+6} = 39.3\left[m/s\right]$$

Y el módulo del desplazamiento es cero, ya que, sale del punto P y vuelve al mismo lugar. Por tanto, la magnitud de la velocidad media es cero.

c) Al comparar los resultados obtenidos para cada pregunta, se concluye que en este ejercicio la rapidez media es diferente de la magnitud de la velocidad.

➢ *Ejercicio 2*

Un cuerpo sometido solo a una fuerza de restitución proporcional al desplazamiento desde su eje de equilibrio, se moverá describiendo un movimiento armónico simple que puede ser descrito mediante la expresión

$$x(t) = A\cos\left(\omega t + \phi\right)$$

Donde *A* es la amplitud del movimiento, ω es la frecuencia angular y ϕ la fase inicial. Determine las funciones velocidad instantánea y aceleración instantánea. ¿Cuál es la magnitud de la velocidad máxima del movimiento? ¿Cuál es la magnitud de la aceleración máxima del movimiento?

Solución

Conocida la función posición instantánea dependiente del tiempo, es posible encontrar v_x derivando la función posición respecto del tiempo, así:

$$v_x\left(t\right) = \frac{d\left(x(t)\right)}{dt} = \frac{d\left(A\cdot\cos\left(\omega\cdot t+\phi\right)\right)}{dt} = -A\cdot\omega\cdot\text{sen}\left(\omega\cdot t+\phi\right)$$

Y conocida v_x, es posible encontrar a_x así

$$a_x(t) = \frac{d(v(t))}{dt} = \frac{d(-A \cdot \omega \cdot \mathrm{sen}(\omega \cdot t + \phi))}{dt} = -A \cdot \omega^2 \cdot \cos(\omega \cdot t + \phi)$$

Las funciones seno y coseno oscilan entre los valores máximos de 1 y -1, luego:

$$v_{x,máx} = A \cdot \omega$$

$$a_{x,máx} = A \cdot \omega^2$$

➢ *Ejercicio 3*

Un carrito que se mueve a control remoto, se mueve en plano *xy* partiendo desde el origen del plano cartesiano. Las coordenadas *x* e *y* (medidas en metros) varían con el tiempo *t* (medido en segundos) según:

$$x(t) = 3 - 0,5t^2$$
$$y(t) = t + 0,75e^{-2t}$$

Determine las coordenadas del carrito y su distancia respecto al origen de coordenadas en t = 1,0[s] además de su velocidad instantánea y su aceleración instantánea en ese mismo tiempo.

Solución

Para conocer las coordenadas del carrito, se debe reemplazar el valor del tiempo dado en las relaciones de las coordenadas:

$$x(1) = 3 - 0,5(1)^2 = 2,5[m]$$
$$y(1) = 1 + 0,75e^{-2(1)} = 1,1[m]$$

El carrito se encuentra en el punto (2,5 ; 1,1)[m]

La distancia respecto al origen de coordenadas corresponde a la hipotenusa del triángulo rectángulo de lados 2,5 y 1,1, entonces:

$$d = \sqrt{(2,5)^2 + (1,1)^2} = 2,7[m]$$

Dado que el carrito se mueve en dos dimensiones, se debe determinar su velocidad para cada dimensión por separado,

$$v_x(t) = \frac{dx}{dt} = -t$$
$$v_y(t) = \frac{dy}{dt} = 1 - 1,5e^{-2t}$$

En Física v_x y v_y pueden denominarse "componentes escalares de la velocidad" en la dirección x e y respectivamente. Luego en el instante t=1[s] la velocidad en cada componente es:

$$v_x(t) = -1,0[m/s]$$

$$v_y(1) = 1 - 1,5e^{-2(1)} = 0,80[m/s]$$

La magnitud del vector velocidad es:

$$\left|\vec{v}(1)\right| = \sqrt{(-1,0)^2 + (0,80)^2} = 1,3[m/s]$$

Esta velocidad forma un ángulo α, respecto al eje *x,* de:

$$\alpha = 180 + \text{Arctan}\left(\frac{0,80}{-1}\right) = 141,3°$$

O $$\alpha = 180 - \text{Arctan}\left(\frac{0,80}{1}\right) = 141,3°$$

O $$\alpha = 90 + \text{Arctan}\left(\frac{1}{0,80}\right) = 141,3°$$

La aceleración en cada eje es:

$$a_x(1) = \frac{dv_x(t)}{dt} = -1,0\left[\frac{m}{s^2}\right]$$

$$a_y(1) = \frac{dv_y(t)}{dt} = 3e^{-2(1)} = 0,41\left[\frac{m}{s^2}\right]$$

En Física a_x y a_y pueden denominarse "componentes escalares de la aceleración" en la dirección x e y respectivamente.
El vector aceleración tiene una magnitud:

$$\left|\vec{a}(1)\right| = \sqrt{(-1)^2 + (0,41)^2} = 1,1\left[\frac{m}{s^2}\right]$$

Y forma un ángulo β respecto al eje *x* de:

$$\beta = 180 + Arc\tan\left(\frac{0,406}{-1}\right) = 157,7°$$

O $$\beta = 180 - Arc\tan\left(\frac{0,406}{1}\right) = 157,7°$$

O $$\beta = 90 + \text{Arctan}\left(\frac{1}{0,41}\right) = 157,7°$$