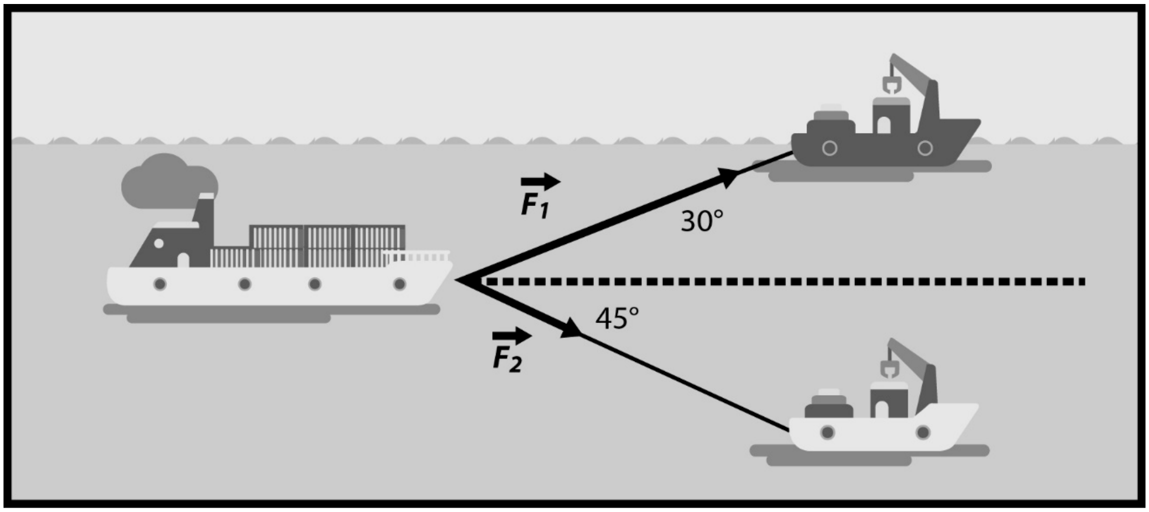
Ejercicios Resueltos: Productos Vectoriales

Ejercicio 1



Dos remolcadores arrastran una barcaza, por agua tranquila. Uno tira con una fuerza F_1 = 20[kN] con un ángulo de 30° respecto del eje de la barcaza, como se muestra en la figura. El segundo remolcador jala con una fuerza F_2 = 15[kN] y un ángulo y un ángulo de 45° también respecto del eje del barco. Determine:

a) Los vectores $\vec{F_1}$ y $\vec{F_2}$ en término de sus componentes canónicas.

b) el ángulo que forman $\vec{F_1}$ con $\vec{F_2}$, a partir de $\vec{F_1} \cdot \vec{F_2}$

Solución:

a) Los vectores pueden expresarse de la forma:

$$\vec{F_1} = \left|\vec{F_1}\right| \cos 30° \hat{i} + \left|\vec{F_1}\right| sen 30° \hat{j}$$

$$\vec{F_1} = \left(17.3\hat{i} + 10.0\hat{j}\right)[kN]$$

$$\vec{F_2} = \left|\vec{F_2}\right| \cos 45° \hat{i} - \left|\vec{F_2}\right| sen 45° \hat{j}$$

$$\vec{F_2} = \left(10.6\hat{i} - 10.6\hat{j}\right)[kN]$$

b) Se puede expresar el producto punto como:

$$\vec{F_1} \cdot \vec{F_2} = F_{1x} \cdot F_{2x} + F_{1y} \cdot F_{2y} = 17.3 \cdot 10.6 + 10.0 \cdot (-10.6) = 77.4$$

Además:

$$\vec{F_1} \cdot \vec{F_2} = \left|\vec{F_1}\right| \cdot \left|\vec{F_2}\right| \cos\phi$$

Entonces:

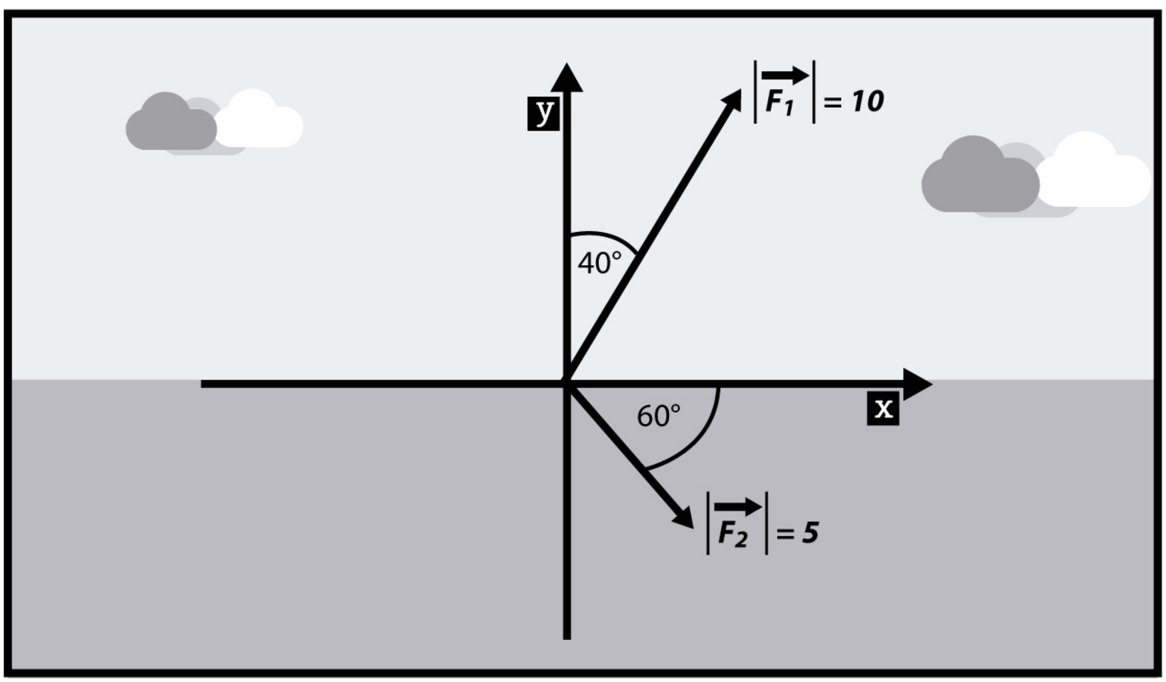
$$\vec{F_1} \cdot \vec{F_2} = 20 \cdot 15 \cdot \cos\phi = 77.4$$

$$\cos\phi = \frac{77.4}{20 \cdot 15}$$

$$\phi = arc\cos\left(\frac{77.4}{20 \cdot 15}\right)$$

$$\phi = 75°$$

➢ *Ejercicio 2*

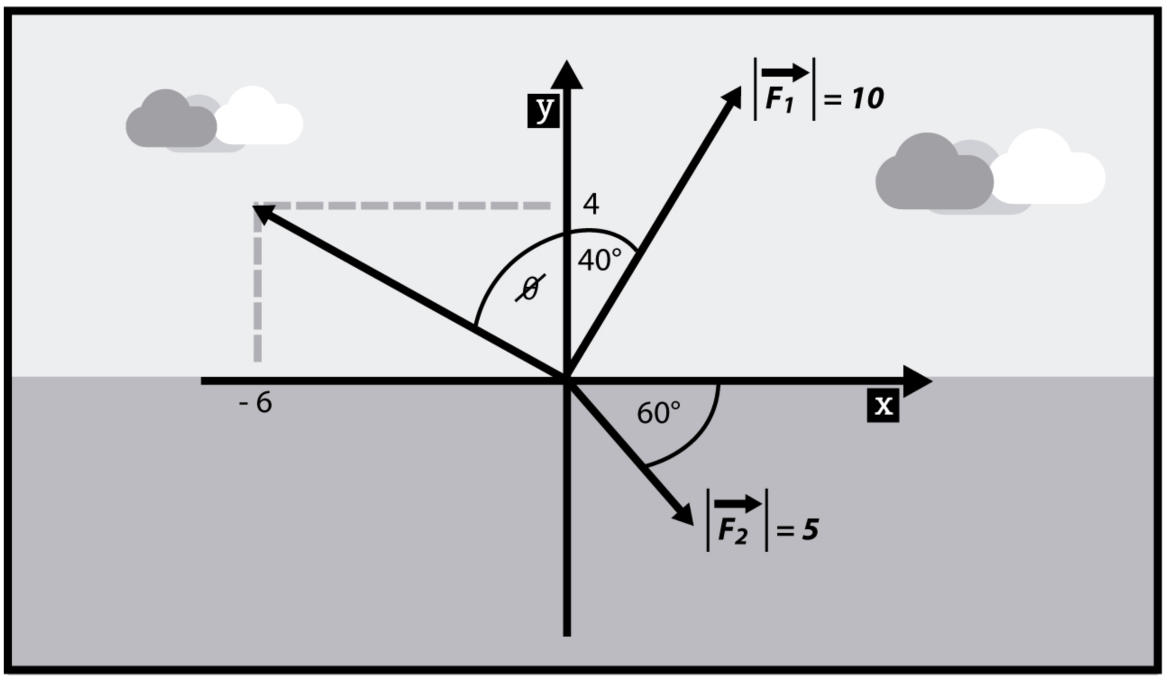


Considere los vectores $\overrightarrow{F_1}$, $\overrightarrow{F_2}$ y $\overrightarrow{F_3}$, donde el módulo de $\overrightarrow{F_1}$ es 10 y el módulo de $\overrightarrow{F_2}$ es 5, como se muestra en la figura. El vector $\overrightarrow{F_3}$ tiene su origen en el origen del sistema de coordenadas y su extremo en el punto (-6, 4).

a) Exprese cada uno de los vectores en componentes cartesianas

b) Determine el ángulo formado entre los vectores $\overrightarrow{F_1}$ y $\overrightarrow{F_3}$

Solución:



a) $\overrightarrow{F_1} = 10 sen 40° \hat{i} + 10 \cos 40° \hat{j} = 6{,}43\hat{i} + 7{,}66\hat{j}$

$\overrightarrow{F_2} = 5\cos 60° \hat{i} - 5 sen 60° \hat{j} = 2{,}5\hat{i} - 4{,}33\hat{j}$

$\overrightarrow{F_3} = -6\hat{i} + 4\hat{j}$

b) $\vec{F_1} \bullet \vec{F_3} = (6{,}43)(-6) + (7{,}66)(4) = -7{,}94 = \left|\vec{F_1}\right|\left|\vec{F_3}\right| \cos\alpha$

$$\alpha = \arccos\left(\frac{-7{,}94}{10 \cdot \sqrt{6^2 + 4^2}}\right) = 96{,}3°$$

Otro camino:

$$\phi = \arctan\left(\frac{6}{4}\right) = 56{,}3°$$

$$\alpha = \phi + 40° = 56{,}3° + 40° = 96{,}3°$$

➢ *Ejercicio 3*

Dado los vectores $\vec{A} = 3\hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k}$ y $\vec{B} = 2\hat{i} + 3\hat{j} - \hat{k}$, determine: a) $\left|\vec{A}\right|$, $\left|\vec{B}\right|$, $\vec{A} + \vec{B}$, ; b) $\vec{A} \cdot \vec{B}$; b)un vector C tal que sea unitario y perpendicular a ambos.

Solución:

a) El módulo de los vectores se determina como:

$$\left|\vec{A}\right| = \sqrt{3^2 + (-1)^2 + 2^2}$$

$$\left|\vec{A}\right| = \sqrt{14} = 3.74$$

$$\left|\vec{B}\right| = \sqrt{2^2 + 3^2 + (-1)^2}$$

$$\left|\vec{B}\right| = \sqrt{14} = 3.74$$

Usando el método de las componentes, la suma de los vectores es:

$$\vec{A} + \vec{B} = (3+2)\hat{i} + (-1+3)\hat{j} + (2+-1)\hat{k}$$

$$\vec{A} + \vec{B} = 5\hat{i} + 2\hat{j} + 1\hat{k}$$

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = 3 \cdot 2 + (-1) \cdot 3 + 2(-1)$$

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = 1$$

b)

$$\vec{A}\times\vec{B}=\begin{vmatrix}\hat{i} & \hat{j} & \hat{k}\\ 3 & -1 & 2\\ 2 & 3 & -1\end{vmatrix}=\hat{i}\left(\left(-1\right)\cdot\left(-1\right)-2\cdot 3\right)-\hat{j}\left(3\cdot\left(-1\right)-2\cdot 2\right)+\hat{k}\left(3\cdot 3-\left(-1\right)\cdot 2\right)$$

$$\vec{A}\times\vec{B}=-5\hat{i}+7\hat{j}+11\hat{k}$$

$$\left|\vec{A}\times\vec{B}\right|=\sqrt{\left(-5\right)^2+7^2+11^2}$$

$$\left|\vec{A}\times\vec{B}\right|=\sqrt{195}=13.9$$

$$\vec{C}=\frac{-5\hat{i}+7\hat{j}+11\hat{k}}{\sqrt{195}}$$