Ejercicios Desarrollados: Hipérbola

Ejercicio 1

Determine los principales elementos y grafique la Hipérbola

$$\frac{(y+1)^2}{9} - \frac{(x+3)^2}{25} = 1$$

Desarrollo

La Hipérbola tiene eje transversal vertical. El centro es *(h,k)* = *(-3,-1)*

Identificamos los valores *a* y *b*

$$a^2 = 9 \quad \overset{a>0}{\overbrace{\Rightarrow}} \quad a = 3$$

$$b^2 = 25 \quad \overset{b>0}{\overbrace{\Rightarrow}} \quad b = 5$$

El eje transversal de la hipérbola es el segmento vertical de recta que pasa por su centro de longitud 2a = 6 . Los extremos del eje transversal son los vértices en los puntos

$$V_1 = (-3, -1+3) = (-3, 2)$$

$$V_2 = (-3, -1-3) = (-3, -4)$$

Los focos de la hipérbola se sitúan a c unidades del centro, donde

$$c^2 = a^2 + b^2 \quad \Rightarrow \quad c^2 = 9+25 \quad \overset{c>0}{\overbrace{\Rightarrow}} \quad c = \sqrt{34}$$

Por lo tanto los focos están sobre la recta que contiene al eje transversal a una distancia de $\sqrt{34}$ unidades del centro, es decir en los puntos:

$$F_1 = \left(-3,\ -1+\sqrt{34}\right)$$

$$F_1 = \left(-3,\ -1-\sqrt{34}\right)$$

Para calcular la ecuación l de las asíntotas debemos igualar a 0 en la ecuación canónica

$$\frac{(y+1)^2}{9} - \frac{(x+3)^2}{25} = 0$$

$$\frac{(y+1)^2}{9} = \frac{(x+3)^2}{25}$$

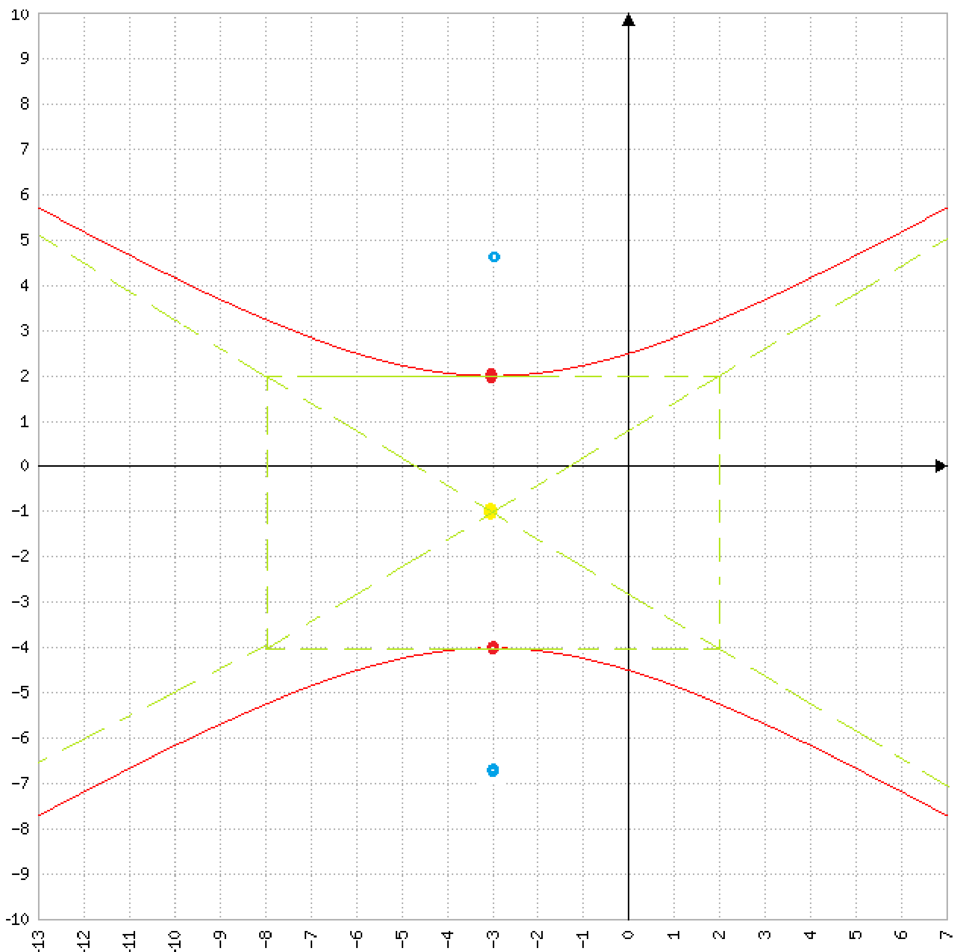
$$5\,(y+1) = \pm\, 3(x+3)$$

Asíntotas:

$5y - 3x - 4 = 0$ $\qquad\qquad$ $5y + 3x + 14 = 0$

Para graficar utilizaremos como apoyo el rectángulo auxiliar, cuyo centro es *(-3,-1)* tiene altura *2a=6* y ancho *2b=10*. Las diagonales corresponden a las asíntotas de la hipérbola.

Marcamos todos los elementos y trazamos la gráfica:



Ejercicio 2

Determine la ecuación canónica de la Hipérbola $3x^2 - y^2 + 6x + 6y - 5 = 0$

Desarrollo

Utilizamos el método completación de cuadrado en las variables *x* e *y* para determinar la ecuación canónica

$$3x^2 - y^2 + 6x + 6y - 5 = 0$$

$$3x^2 - y^2 + 6x + 6y = 5$$

$$3(x^2 + 2x) - (y^2 - 6y) = 5$$

$$3(x^2 + 2x + 1) - (y^2 - 6y + 9) = 5 + 3 - 9$$

$$3(x+1)^2 - (y-3)^2 = -1 \quad / \cdot (-1)$$

$$(y-3)^2 - 3(x+1)^2 = 1$$

$$\frac{(y-3)^2}{1} - \frac{(x+1)^2}{1/3} = 1 \qquad \textit{ecuación canonica}$$

Ejercicio 3

Determine la ecuación canónica de la Hipérbola si sus focos se ubican en los puntos

$\left(-1, 3 - \sqrt{13}\right)$ $\left(-1, 3 + \sqrt{13}\right)$ y pasa por el punto $(-1, 1)$

Desarrollo

Observe que los focos se encuentran alineados de forma vertical, por lo tanto la Hipérbola tiene eje transversal vertical, con ecuación canónica:

$$\frac{(y-k)^2}{a^2} - \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1 \qquad a>0 \ , b>0$$

El centro de la Hipérbola es el punto medio entre los dos focos

$$Centro \ (h,k) = \left(\frac{-1+-1}{2} \ , \ \frac{\left(3-\sqrt{13}\right)+\left(3+\sqrt{13}\right)}{2} \right) = (-1\ ,\ 3)$$

Reemplazando $\dfrac{(y-3)^2}{a^2} - \dfrac{(x+1)^2}{b^2} = 1$

El punto $(-1\ ,1)$ pertenece a la Hipérbola, por lo tanto

$$\frac{(1-3)^2}{a^2} - \frac{(-1+1)^2}{b^2} = 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{4}{a^2} - 0 = 1 \quad \Rightarrow \quad a^2 = 4 \quad \overbrace{\Rightarrow}^{a>0} \quad a = 2$$

El valor c corresponde a la distancia entre los focos y el centro

$$c = d\left(\left(-1,\ 3-\sqrt{13}\right),\ (-1\ ,\ 3)\right) = \sqrt{0^2 + \left(\sqrt{13}\right)^2} = \sqrt{13}$$

Reemplazando $a = 2$ y $c = \sqrt{13}$ en la igualdad $a^2 + b^2 = c^2$ se obtiene el valor de b

$$4 + b^2 = 13 \quad \overbrace{\Rightarrow}^{b>0} \quad b = 3$$

Por lo tanto la ecuación canónica es

$$\frac{(y-3)^2}{4} - \frac{(x+1)^2}{9} = 1$$