Ejercicios Resueltos Teorema del Binomio

Ejercicio 1

En el desarrollo del binomio $\left(2\sqrt{x}+\dfrac{y^2}{3}\right)^8$

a) Encuentre el séptimo término

b) Determine el coeficiente del término (si existe), que acompaña a x^3y^4

Desarrollo:

a) Se considera *k = 6* *y* *n =8*

$$T_7 = T_{6+1} = \binom{8}{6}\cdot\left(2\sqrt{x}\right)^2\cdot\left(\frac{y^2}{3}\right)^6$$

$$= \binom{8}{6}\,(2)^2\cdot(\sqrt{x})^2\cdot\frac{\left(y^2\right)^6}{(3)^6}$$

$$= \binom{8}{6}\cdot\frac{4}{729}\cdot xy^{12}$$

$$= \frac{112}{729}\cdot xy^{12}$$

Por lo tanto el 7° término es $T_7 = \dfrac{112}{729}\cdot xy^{12}$

b) Considere que el término *(k+1)* tiene como parte literal x^3y^4

$$T_{k+1} = \binom{8}{k}\cdot\left(2\sqrt{x}\right)^{8-k}\cdot\left(\frac{y^2}{3}\right)^k$$

$$= \binom{8}{k}\cdot(2)^{8-k}\,\frac{1}{(3)^k}\cdot\left(\sqrt{x}\right)^{8-k}\cdot\left(y^2\right)^k$$

$$= \underbrace{\binom{8}{k}\cdot(2)^{8-k}\,\frac{1}{(3)^k}}_{coeficiente}\cdot\underbrace{(x)^{4-\frac{k}{2}}\;y^{2k}}_{parte\ literal}$$

$$\Rightarrow\quad (x)^{4-\frac{k}{2}}\,y^{2k} = x^3y^4$$
$$\Rightarrow\quad 4-\frac{k}{2} = 3 \;\wedge\; 2k = 4$$
$$\Rightarrow\quad k = 2$$

Se reemplaza en el coeficiente y se obtiene el coeficiente

$$\binom{8}{2}\cdot(2)^{8-2}\,\frac{1}{(3)^2} = \binom{8}{2}\frac{2^6}{9} = \frac{1792}{9}$$

➢ *Ejercicio 2*

Encuentre el coeficiente del término *independiente* (que acompaña a x^0) en el desarrollo de:

$$(2x+1)\cdot\left(1+\frac{2}{x}\right)^7$$

Desarrollo

La expresión se puede descomponer en la suma

$$(2x+3)\cdot\left(1+\frac{2}{x}\right)^7 = \underbrace{(2x)\cdot\left(1+\frac{2}{x}\right)^7}_{E1} + \underbrace{(3)\cdot\left(1+\frac{2}{x}\right)^7}_{E2}$$

Se identifica el término independiente en ambas expresiones (*E1 y E2*) y luego se suman los coeficientes para obtener lo solicitado.

- ✓ El término independiente de *E1* es equivalente a determinar el término que acompaña a x^{-1} en el desarrollo de $\left(1+\frac{2}{x}\right)^7$ pues está multiplicado por $(2x)$

Suponga que el término *(k+1)* tiene como parte literal x^{-1}, se desea determinar el coeficiente numérico de este término.

$$T_{k+1} = \binom{7}{k} \cdot (1)^{7-k} \cdot \left(\frac{2}{x}\right)^k$$
$$= \binom{7}{k} \cdot 1 \cdot 2^k (x)^{-k} \cdot$$
$$= \underbrace{\binom{7}{k} \cdot 2^k}_{coeficiente} \cdot \underbrace{(x)^{-k}}_{parte\ literal}$$

$$\Rightarrow \quad (x)^{-k} = x^{-1}$$
$$\Rightarrow \quad -k = -1$$
$$\Rightarrow \quad k = 1$$

Se reemplaza en el coeficiente y se obtiene

$$\binom{7}{1} \cdot\cdot 2^1 = \frac{7 \cdot 6!}{6! \cdot 1} \cdot 2 = 14$$

Por lo tanto el coeficiente numérico de *E1* es $2 \cdot 14 = 28$

- ✓ El término independiente de *E2* es equivalente a determinar el término independiente (que acompaña a x^0) en el desarrollo de $\left(1 + \frac{2}{x}\right)^7$ pues sólo está multiplicado por (3)

Suponga que el término *(k+1)* tiene como parte literal x^0, se desea determinar el coeficiente numérico de este término.

$$T_{k+1} = \underbrace{\binom{7}{k} \cdot 2^k}_{coeficiente} \cdot \underbrace{(x)^{-k}}_{parte\ literal}$$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow \quad (x)^{-k} = x^0 \\ &\Rightarrow \quad -k = 0 \\ &\Rightarrow \quad k = 0 \end{aligned}$$

Se reemplaza en el coeficiente y se obtiene

$$\binom{7}{0} \cdot\cdot\, 2^0 = \frac{7!}{7! \cdot 0!} \cdot 1 = 1$$

Por lo tanto el coeficiente numérico del término independiente de *E2* es $3 \cdot 1 = 3$

Luego, el término *independiente* en el desarrollo de $(2x+1) \cdot \left(1 + \frac{2}{x}\right)^7$ es

$28 + 3 =$ **31**

➢ *Ejercicio 3*

Encuentre el término independiente en el desarrollo del binomio:

$$\left(x^3y-\frac{1}{xy^2}\right)^7$$

Desarrollo

Considere que el término *(k+1)* es independiente, es decir tiene como parte literal x^0y^0

$$\begin{aligned} T_{k+1} &= \binom{7}{k}\cdot\left(x^3y\right)^{7-k}\cdot\left(-\frac{1}{xy^2}\right)^k \\ &= \binom{7}{k}\cdot\left(x^3\right)^{7-k}y^{7-k}\left(-1\right)^k\cdot\left(x^{-1}\right)^k\left(y^{-2}\right)^k \\ &= \underbrace{\binom{7}{k}\cdot\left(-1\right)^k}_{coeficiente}\cdot\underbrace{\left(x\right)^{21-3k-k}\;y^{7-k-2k}}_{parte\ literal} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow\quad \left(x\right)^{21-4k}y^{7-3k}=x^0y^0 \\ &\Rightarrow\quad 21-4k=0\ \wedge\ 7-3k=0 \\ &\Rightarrow\quad k=\frac{21}{4}\ \wedge\ k=\frac{7}{3} \end{aligned}$$

No es posible que k tenga dos valores distintos, más aún, no son números naturales.

Por lo tanto:

No existe término independiente en el desarrollo del binomio.