Ejercicios Resueltos: Sumatoria

Ejercicio 1

Encuentre usando sumatoria, la suma de 30 números consecutivos múltiplos de 5, partiendo desde el 20.

Desarrollo

La sumatoria corresponde a:

$$\sum_{k=4}^{33} 5k = 20 + 25 + 30 + \cdots 165$$

$$\sum_{k=4}^{33} 5k = \sum_{k=1}^{33} 5k - \sum_{k=1}^{3} 5k$$

$$= 5\sum_{k=1}^{33} k - 5\sum_{k=1}^{3} k$$

$$= 5 \cdot \frac{33 \cdot 34}{2} - 5\frac{3 \cdot 4}{2}$$

$$= 2.775$$

Ejercicio 2

a) Determine el valor de $m \in \mathbb{R}$ que satisface la ecuación:

$$\sum_{i=1}^{m} \frac{1}{\sqrt{2i-1}+\sqrt{2i+1}} = 4$$

Desarrollo

a) $$\sum_{i=1}^{m} \frac{1}{\sqrt{2i-1}+\sqrt{2i+1}} = \sum_{i=1}^{m} \frac{1}{\sqrt{2i-1}+\sqrt{2i+1}} \cdot \frac{\sqrt{2i-1}-\sqrt{2i+1}}{\sqrt{2i-1}-\sqrt{2i+1}}$$

$$= \sum_{i=1}^{m} \frac{\sqrt{2i-1}-\sqrt{2i+1}}{(\sqrt{2i-1})^2-(\sqrt{2i+1})^2}$$

$$= \sum_{i=1}^{m} \frac{\sqrt{2i-1}-\sqrt{2i+1}}{-2}$$

$$= \frac{-1}{2}\sum_{i=1}^{m}(\sqrt{2i-1}-\sqrt{2i+1})$$ Sumatoria telescópica

$$= \frac{-1}{2}\left(\sqrt{2\cdot 1-1}-\sqrt{2\cdot m+1}\right)$$

Luego formamos la ecuación:

$$\frac{-1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{2m+1}=4$$
$$-1+\sqrt{2m+1}=8$$
$$\sqrt{2m+1}=9$$
$$2m+1=81$$
$$2m=40$$
$$m=40$$

b) Calcular el valor de:

$$\sum_{k=1}^{12}\frac{-2}{k^2+2k}$$

> ***Desarrollo***

a) La sumatoria corresponde a una sumatoria telescópica, donde $a_k=\frac{k}{2k+3}$

$$\sum_{k=1}^{20}\left(\frac{k+1}{2k+5}-\frac{k}{2k+3}\right)=\frac{21}{45}-\frac{1}{4}=\frac{4}{15}$$

b) A través de un procedimiento adecuado, es posible transformar la sumatoria en telescópica:

Paso 1: Realizar descomposición en fracciones parciales:

$$\frac{-2}{k^2+2k}=\frac{-2}{k(k+2)}=\frac{A}{k}+\frac{B}{k+2}=\frac{A(k+2)+Bk}{k(k+2)}$$

Esto implica

$-2 = A(k+2) + Bk = (A+B)k + 2A$

Igualando polinomios se forma el sistema:

$$\left.\begin{aligned} A + B &= 0 \\ 2A &= -2 \end{aligned}\right|$$

Con soluciones: $A = -1; B = 1$

$$\frac{-2}{k^2+2k} = \frac{-1}{k} + \frac{1}{k+2}$$

Luego

$$\sum_{k=1}^{12} \frac{-2}{k^2+2k} = \sum_{k=1}^{12} \left(\frac{1}{k+2} - \frac{1}{k}\right)$$

Paso 2: Sumar cero en la sumatoria:

$$\sum_{k=1}^{12} \left(\frac{1}{k+2} + \frac{1}{k}\right) = \sum_{k=1}^{12} \left(\frac{1}{k+2} - \frac{1}{k+1} + \frac{1}{k+1} - \frac{1}{k}\right)$$

$$= \sum_{k=1}^{12} \left(\frac{1}{k+2} - \frac{1}{k+1}\right) + \sum_{k=1}^{12} \left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k}\right)$$

$$= \left(\frac{1}{14} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{13} - \frac{1}{1}\right) = \frac{-123}{91}$$

Ejercicio 3

Una multitienda, decidió instalar en su red de tiendas cámara de seguridad de última generación, con el fin de mejorar la seguridad. La instalación se realizó de acuerdo al siguiente protocolo: 5 cámaras la primera semana: 7 la segunda semana, 9 la tercera y así sucesivamente durante 12 semanas.

a) Exprese el planteo anterior por medio de sumatoria.

b) Determine la cantidad total de cámaras instaladas

c) Determine la cantidad de cámaras que se instalaron el último día.

d) Determine en cuantas semanas se han instalado 140 cámaras.

Desarrollo

a) $5+7+9+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots=\sum_{k=1}^{12}(2k+3)$

b) $\sum_{k=1}^{12}(2k+3)=2\sum_{k=1}^{12}k+\sum_{k=1}^{12}3$

$$=\frac{2\cdot 12\cdot 13}{2}+36$$

$$=192$$

Respuesta: La cantidad de cámaras instaladas en las 12 semanas 192.

c) $a_{12}=\sum_{k=10}^{12}(2k+3)=27$

Respuesta: El último día se instalaron 27 pantallas.

d) $\sum_{k=1}^{n}(2k+3)=140$

$$2\sum_{k=1}^{n}k+\sum_{k=1}^{n}3=140$$

$$\frac{2 \cdot n \cdot (n+1)}{2} + 3n = 140$$

$$n^2 + 4n = 140$$

$$n^2 + 4n - 140 = 0$$

$$(n-10)(n+14) = 0$$

$$n_1 = 10$$

$$n_2 = -14 \notin IN$$

Respuesta: Al día 10 se habían instalado 140 cámaras.