Ejercicios Resueltos: Progresión Geométrica

Ejercicio 1

En una P.G , el segundo término es 46 y el quinto término es 368 ¿Cuántos términos se deben sumar para que el resultado sea 1.449?

Desarrollo:

Para encontrar la suma es necesario conocer el primer término y la razón

$$a_2 = a_1 \cdot r = 46$$

$a_5 = a_1 \cdot r^4$=368

Se forma el sistema

$$a_1 \cdot r = 46$$
$$a_1 \cdot r^4 = 368$$

Se resuelve el sistema reemplazando la ecuación 1 en la ecuación 2

$$a_1 \cdot r^4 = 368 \Longrightarrow a_1 \cdot r \cdot r^3 = 46 \cdot r^3 = 368 \Longrightarrow r^3 = \frac{368}{46} \Longrightarrow r^3 = 8 \Longrightarrow r = 2$$

Reemplazando $r = 2$ en la ecuación 1 se obtiene $a_1 \cdot 2 = 46 \Longrightarrow a_1 = 23$

Por lo tanto

$$S_n = 23 \cdot \frac{1-2^n}{1-2} = 1.449 \Longrightarrow 1 - 2^n = -63 \Longrightarrow 2^n = 64 \Longrightarrow 2^n = 2^6 \Longrightarrow n = 6$$

Resp: La suma de los seis primeros términos de la P.G es 1.449

UTEM

➢ *Ejercicio 2*

Para la adquisición de un terreno una persona debe contraer una deuda de $4.000.000. El banco le presta el dinero, pero le cobra un 15% anual. Si la persona decide pagar en 20 años ¿Cuánto debe cancelar en total al cabo de 20 años?

Desarrollo

Sea:

a_1 la deuda adquirida si el plazo fuese un año

a_2 La deuda adquirida si el plazo fuese de dos años

Así sucesivamente.

Observe que al primer años la deuda se incrementa en un 15% es decir, la deuda sería de

$$a_1 = 4.000.000 + \frac{15}{100}4.000.000 = 4.000.000\left(1 + \frac{15}{100}\right)$$

Al segundo año la deuda que se tiene al primer año se debe incrementar un 15%, es decir:

$$a_2 = 4.000.000\left(1 + \frac{15}{100}\right) + \frac{15}{100}\left(4.000.000\left(1 + \frac{15}{100}\right)\right)$$

$$=4.000.000\left(1 + \frac{15}{100}\right)\left(1 + \frac{15}{100}\right)$$

$$= 4.000.000\left(1 + \frac{15}{100}\right)^2$$

De la misma manera se obtiene que

$$a_3 = 4.000.000\left(1 + \frac{15}{100}\right)^3$$

Es claro que los elementos a_i forman una P.G.

Para obtener la deuda al cabo de 20 años se debe calcular a_{20}

$$a_{20} = 4.000.000\left(1 + \frac{15}{100}\right)^{20} \approx 65.466.150$$

Resp: La deuda adquirida es de $ 65.466.150 aproximadamente.

➢ *Ejercicio 3*

En la ecuación real $x + \frac{x}{3} + \frac{x}{9} + \frac{x}{27} + \frac{x}{81} + \ldots = 15$, el valor de x corresponde a:

Desarrollo

Se observa que el lado izquierdo de la ecuación corresponde a una suma infinita de términos, donde cada uno de ellos corresponde a un término de una P.G, en efecto:

$a_1 = x;$

$a_2 = \frac{x}{3} = x \cdot \frac{1}{3};$

$a_3 = \frac{x}{9} = x \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2$

$a_n = x \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$, es decir la P.G tiene como primer término x y razón $\frac{1}{3}$

Luego $x + \frac{x}{3} + \frac{x}{9} + \frac{x}{27} + \frac{x}{81} + \ldots = \frac{x}{1-\frac{1}{3}}$ (suma infinita con $|r| < 1$)

La ecuación queda representada por

$$\frac{x}{1-\frac{1}{3}} = 15 \Longrightarrow x = 10$$